
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01078426 2

LEÇONS

DE

MÉCANIQUE CÉLESTE.

34911 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

LEÇONS

DE

MÉCANIQUE CÉLESTE

PROFESSÉES A LA SORBONNE

PAR

H. POINCARÉ,

MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE PARIS.

TOME I.

THÉORIE GÉNÉRALE DES PERTURBATIONS PLANETAIRES.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1905



INTRODUCTION.

Ce Livre ne doit faire double emploi ni avec mon Ouvrage sur *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste,* ni avec le *Traité de Mécanique céleste* de Tisserand.

Dans *Les Méthodes nouvelles* je me suis placé le plus souvent au point de vue du géomètre et j'ai recherché la rigueur analytique; j'ai, par exemple, consacré à la question de convergence des séries de longs efforts et des pages nombreuses; ici, au contraire, je laisserai cette question complètement de côté et le lecteur qui désirerait l'étudier devrait se reporter aux Volumes que je viens de citer.

D'autre part, dans ces Volumes, j'ai poussé l'approximation beaucoup plus loin que ne l'exige la pratique; j'ai pu ainsi faire ressortir des circonstances tout à fait imprévues, dont l'importance analytique est très grande, mais qui n'ont aucun intérêt pour l'astronome praticien, et n'en acquerront que le jour où la précision des observations sera beaucoup plus grande qu'aujourd'hui, ou quand on voudra comparer des observations s'étendant sur une longue suite de siècles.

Au contraire, j'ai regardé les résultats anciens comme connus, de sorte que j'ai peu insisté sur le lien qui rattache les méthodes nouvelles aux anciennes et sur la façon dont celles-là sont sorties de celles-ci.

L'Ouvrage n'était donc pas accessible au débutant et ne convenait qu'au lecteur déjà familier avec la Mécanique céleste.

Ici, au contraire, je me borne à reproduire les leçons que j'ai professées devant les élèves de la Sorbonne et je prends le problème à son début, en supposant connus seulement les principes de l'Analyse et de la Mécanique, ainsi que les lois de Képler et de Newton. Je n'emprunte aux méthodes nouvelles que leurs résultats essentiels, ceux qui sont susceptibles d'une application immédiate, en m'efforçant de les rattacher le plus intimement possible à la méthode classique de la variation des constantes.

D'un autre côté, Tisserand s'est constamment préoccupé de reproduire aussi fidèlement qu'il a pu la pensée des fondateurs de la Mécanique céleste et, en effet, son Livre nous la rend tout entière sous une forme condensée. Je n'avais pas à refaire ce qu'il avait fait et bien fait.

J'ai été plus droit au but; le chemin suivi par nos devanciers n'a pas toujours été le plus direct: en pareil cas, j'ai coupé au court; je me privais ainsi de tout ce qu'ils avaient vu en route et qui souvent était plein d'intérêt; mais je n'avais pas à le regretter, puisque Tisserand nous l'avait montré.

Ce nouveau Livre ne dispensera donc pas de lire les deux Livres anciens et dans la suite j'y ferai de fréquents renvois.



LEÇONS

DE

MÉCANIQUE CÉLESTE.

CHAPITRE I.

PRINCIPES DE LA DYNAMIQUE.

Il ne s'agit ici ni des fondements expérimentaux ni des principes philosophiques de la Mécanique, mais uniquement de certaines transformations analytiques dont la connaissance est indispensable à celui qui veut étudier la Dynamique. Ce sont celles qui ont fait l'objet des célèbres *Vorlesungen über Dynamik* de Jacobi.

1. **Équations canoniques.** — Soient

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n,$$
$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad x_n$$

$2n$ variables réparties en deux séries, et soit F une fonction quelconque de ces $2n$ variables. Envisageons les équations différentielles

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}. \tag{1}$$

Les équations différentielles de cette forme s'appelleront *équations canoniques*.

Si l'on avait intégré complètement ces équations, on aurait exprimé les inconnues x et y en fonction du temps t et de $2n$ con-

stantes d'intégrations

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_{2n}.$$

Remarquons en passant que le déterminant fonctionnel des x et des y par rapport aux constantes α ne peut être identiquement nul. S'il l'était, en effet, il y aurait entre les x, les y et les t une relation indépendante des α ; on ne pourrait donc attribuer aux x et aux y de valeurs initiales quelconques pour $t = t_0$.

Il est aisé de voir, en outre, qu'on aura, en vertu des équations (1),

$$\frac{dF}{dt} = \sum \left(\frac{dF}{dx_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{dF}{dy_i} \frac{dy_i}{dt} \right) = 0,$$

d'où

$$F = \text{const.},$$

ce qui nous donne une intégrale des équations (1).

Cette intégrale peut s'appeler intégrale des forces vives ; car, dans le cas des équations de la Dynamique, elle n'est pas autre chose, comme nous le verrons, que l'équation de la conservation de l'énergie.

2. Les équations canoniques (1) peuvent se mettre sous une forme différente, mais équivalente :

Supposons que tout ait été exprimé en fonction de t et des constantes α; on aura identiquement :

$$(2) \qquad \frac{d}{dt} \sum x \frac{dy}{d\alpha_k} - \frac{d}{d\alpha_k} \sum x \frac{dy}{dt} = \sum \frac{dx}{dt} \frac{dy}{d\alpha_k} - \sum \frac{dy}{dt} \frac{dx}{d\alpha_k},$$

α_k étant l'une quelconque des constantes d'intégration. On aura d'ailleurs

$$(3) \qquad \frac{dF}{d\alpha_k} = \sum \frac{dF}{dy} \frac{dy}{d\alpha_k} + \sum \frac{dF}{dx} \frac{dx}{d\alpha_k}.$$

En vertu des équations (1) le second membre de (2) est égal à celui de (3) ; on aura donc

$$(4) \qquad \frac{d}{dt} \sum x \frac{dy}{d\alpha_k} - \frac{d}{d\alpha_k} \sum x \frac{dy}{dt} = \frac{dF}{d\alpha_k}.$$

On aura $2n$ équations de cette forme puisque l'indice k peut prendre les valeurs $1, 2, \ldots, 2n$.

Réciproquement, si l'équation (4) a lieu, le second membre

de (2) est égal à celui de (3), ce qui peut s'écrire

$$\sum\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dF}{dy}\right)\frac{dy}{d\alpha_k}-\sum\left(\frac{dy}{dt}-\frac{dF}{dx}\right)\frac{dx}{d\alpha_k}=0.$$

Ces $2n$ équations sont linéaires par rapport aux $2n$ inconnues

$$\frac{dx}{dt}-\frac{dF}{dy}, \quad -\left(\frac{dy}{dt}-\frac{dF}{dx}\right);$$

le déterminant de ces $2n$ équations linéaires qui n'est autre chose que le déterminant fonctionnel des x et des y par rapport aux α ne peut être identiquement nul. Donc les $2n$ inconnues doivent être nulles, ce qui veut dire que les équations (1) sont satisfaites.

Ainsi les équations (1) peuvent se déduire des équations (4), de même que les équations (4) des équations (1); les deux systèmes d'équations sont donc équivalents.

3. Changements canoniques de variables. — Soient

$$x'_1, \quad x'_2, \quad \ldots, \quad x'_n,$$
$$y'_1, \quad y'_2, \quad \ldots, \quad y'_n$$

$2n$ fonctions des $2n$ variables anciennes x et y. Nous pourrons faire un changement de variables, en prenant pour variables nouvelles les x' et les y'.

Je suppose que les relations qui lient les variables nouvelles aux variables anciennes soient telles que l'expression

$$\sum x'\,dy'-\sum x\,dy=dS$$

soit une différentielle exacte; je dis que le changement de variables n'altérera pas la forme canonique des équations (1) qui deviendront

$$(1\ bis) \qquad \frac{dx'_i}{dt}=\frac{dF}{dy'_i}; \qquad \frac{dy'_i}{dt}=-\frac{dF}{dx'_i}.$$

En effet on a

$$\sum x'\frac{dy'}{d\alpha_k}-\sum x\frac{dy}{d\alpha_k}=\frac{dS}{d\alpha_k},$$
$$\sum x'\frac{dy'}{dt}-\sum x\frac{dy}{dt}=\frac{dS}{dt},$$

et l'on en déduit l'identité

$$(5)\qquad \frac{d}{dt}\sum x\frac{dy}{d\alpha_k}-\frac{d}{d\alpha_k}\sum x\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\sum x'\frac{dy'}{d\alpha_k}-\frac{d}{d\alpha_k}\sum x'\frac{dy'}{dt}.$$

Des équations (1) on peut déduire les équations (4), celles-ci à cause de l'identité (5) donneront

$$(4\ bis)\qquad \frac{d}{dt}\sum x'\frac{dy'}{d\alpha_k}-\frac{d}{d\alpha_k}\sum x'\frac{dy'}{dt}=\frac{dF}{d\alpha_k}$$

qui ne diffèrent des équations (4) que par la substitution des variables nouvelles x' et y' aux variables anciennes x et y. Nous avons vu que des équations (4) on peut déduire les équations (1); de même des équations (4 *bis*) on pourra déduire les équations (1 *bis*). Les équations (1 *bis*) sont donc une conséquence des équations (1). C. Q. F. D.

4. Exemples. — Soit, par exemple,

$$x'_i=y_i,\qquad y'_i=-x_i;$$

dans ce cas :

$$\sum x'\,dy'-\sum x\,dy=-\sum y\,dx-\sum x\,dy=-d\Big(\sum xy\Big)$$

sera une différentielle exacte, de sorte que les équations (1), par suite du changement de variables, se transformeront dans les équations (1 *bis*). C'est d'ailleurs ce qui se vérifie immédiatement.

5. Supposons que les x' soient liés aux x par des relations linéaires, et que les y' soient liés aux y par d'autres relations linéaires. Supposons de plus que l'on ait identiquement

$$(6)\qquad \sum x'y'=\sum xy.$$

Il est clair que les différentielles dy' seront liées aux dy par les *mêmes* relations linéaires que les y' aux y. Dans l'identité (6), nous pouvons donc remplacer les y et les y' par les dy et les dy'. Il en résulte que

$$\sum x'\,dy'-\sum x\,dy=0$$

est une différentielle exacte et que le changement de variables n'altère pas la forme canonique des équations.

6. Si nous posons

$$x = \sqrt{2\rho}\cos\omega, \qquad y = \sqrt{2\rho}\sin\omega,$$

il viendra

$$x\,dy = 2\rho\cos^2\omega\,d\omega + d\rho\cos\omega\sin\omega,$$

donc

$$x\,dy - \rho\,d\omega = \rho\cos 2\omega\,d\omega + \frac{d\rho}{2}\sin 2\omega = d\left[\frac{\rho}{2}\sin 2\omega\right]$$

est une différentielle exacte.

Si donc nous posons

$$x_1 = \sqrt{2x'_1}\cos y'_1, \qquad y_1 = \sqrt{2x'_1}\sin y'_1,$$

et pour $i > 1$

$$x_i = x'_i, \qquad y_i = y'_i;$$

la différence $\sum x'\,dy' - \sum x\,dy$ sera une différentielle exacte et la forme canonique des équations ne sera pas altérée.

7. **Équations de Hamilton.** — Les équations de la Dynamique peuvent se mettre facilement sous la forme canonique.

Nous considérerons un système matériel formé de $\frac{n}{3}$ points matériels; ces points seront soumis à des forces ne dépendant que de leurs coordonnées, et ces forces devront admettre une *fonction des forces* conformément au principe de la conservation de l'énergie.

Je désignerai les coordonnées du premier point matériel par x_1, x_2, x_3; celles du second par x_4, x_5, x_6; ...; celles du $\left(\frac{n}{3}\right)^{\text{ième}}$ et dernier par x_{n-2}, x_{n-1}, x_n.

Je désignerai indifféremment la masse du premier par m_1, m_2 ou m_3; celle du second par m_4, m_5 ou m_6; ...; celle du dernier par m_{n-2}, m_{n-1} ou m_n.

Dans ces conditions, la demi-force vive ou énergie cinétique T aura pour expression

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2.$$

Je désignerai par U l'énergie potentielle qui sera une fonction des coordonnées, de sorte que l'énergie totale sera

$$F = T + U$$

et que les équations du mouvement s'écriront

$$(7) \qquad m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{dU}{dx_i}.$$

Nous poserons

$$y_i = m_i \frac{dx_i}{dt},$$

de sorte que y_1, y_2, y_3 représenteront les trois composantes de la quantité du mouvement du premier point matériel. On aura alors

$$T = \frac{1}{2} \sum \frac{y_i^2}{m_i}$$

et

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{y_i}{m_i} = \frac{dT}{dy_i}.$$

D'autre part, l'équation (7) pourra s'écrire

$$\frac{dy_i}{dt} = -\frac{dU}{dx_i}.$$

Comme T ne dépend pas des x, ni U des y, on aura

$$\frac{dF}{dx_i} = \frac{dU}{dx_i}, \qquad \frac{dF}{dy_i} = \frac{dT}{dy_i}$$

et par conséquent

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i},$$

ce sont bien nos équations canoniques.

8. Adoptons maintenant un système de coordonnées curvilignes quelconques et, au lieu de définir la position du système par les n coordonnées rectangulaires $x_1, x_2, \ldots, x_n$, de ses $\frac{n}{3}$ points matériels, définissons-la par n fonctions quelconques

$$q_1, \quad q_2, \quad \ldots, \quad q_n$$

de ces n coordonnées rectangulaires.

Réciproquement, les n coordonnées rectangulaires x seront des fonctions des n coordonnées nouvelles q. Nous représenterons pour abréger les dérivées $\frac{dx_i}{dt}$ et $\frac{dq_k}{dt}$ par x'_i et q'_k. Alors U, qui ne dépend que des x, ne dépendra que des q.

Soit

$$x_i = \varphi_i(q_1, q_2, \ldots, q_n).$$

En différentiant, on trouve

$$(8) \qquad dx_i = \sum \frac{d\varphi_i}{dq_k} dq_k$$

ou bien encore

$$(9) \qquad x'_i = \sum \frac{d\varphi_i}{dq_k} q'_k.$$

Nous voyons que les x' sont des fonctions linéaires des q', dépendant d'ailleurs des q, puisque les coefficients $\frac{d\varphi_i}{dq_k}$ dépendent des q et pas des q'.

Il en résulte que $T = \frac{1}{2}\sum m x'^2$ sera un polynome homogène du second degré par rapport aux q', dont les coefficients dépendent d'ailleurs des q. Si donc nous posons

$$\frac{dT}{dq'_i} = p_i,$$

nous aurons, en vertu du théorème des fonctions homogènes,

$$2T = \sum \frac{dT}{dq'_i} q'_i = \sum p_i q'_i.$$

Remarquons d'ailleurs que, si l'on exprime T en fonction des x', sous la forme $T = \frac{1}{2}\sum m x'^2$, on aura de même

$$\frac{dT}{dx'_i} = y_i; \qquad 2T = \sum y_i x'_i.$$

Cela posé, donnons aux variables q' des accroissements dq', les variables q étant regardées comme constantes; alors les variables x ne subiront aucun accroissement, puisqu'elles ne dépendent que des q, mais les x' subiront des accroissements dx' et la différen-

tiation de l'équation (9) nous donnera

$$(10) \qquad dx'_i = \sum \frac{d\varphi_i}{dq_k} dq'_k.$$

On aura d'ailleurs

$$dT = \sum \frac{dT}{dq'} dq' = \sum \frac{dT}{dx'} dx'$$

ou

$$(11) \qquad \sum p\, dq' = \sum y\, dx'.$$

La comparaison des équations (8) et (10) nous montre qu'il y a entre les dx' et les dq' les *mêmes* relations linéaires qu'entre les dx et les dq. Dans l'identité (11) nous pouvons donc remplacer les dx' et les dq' par les dx et les dq, ce qui donne

$$\sum p\, dq = \sum y\, dx.$$

Ainsi

$$\sum q\, dp - \sum x\, dy = d\left[\sum pq - \sum yx\right]$$

est une différentielle exacte. Si donc nous prenons pour variables nouvelles les q et les p, la forme canonique des équations ne sera pas altérée et nous aurons

$$(12) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{dF}{dp_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{dF}{dq_i}.$$

Ce sont les équations de Hamilton pour un système quelconque de coordonnées.

9. **Systèmes à liaisons.** — Il est aisé d'étendre ce résultat à un système à liaisons. Supposons que nos $\frac{n}{3}$ points matériels soient soumis à α liaisons, de façon que leurs n coordonnées rectangulaires puissent être exprimées en fonction de $n - \alpha = \beta$ variables indépendantes

$$(13) \qquad q_1, \quad q_2, \quad \ldots, \quad q_\beta.$$

Soient

$$x_i = \varphi_i(q_1, q_2, \ldots, q_\beta)$$

les expressions des n coordonnées rectangulaires en fonction de ces β variables.

Introduisons α variables auxiliaires

$$(14)\qquad q_{\beta+1},\quad q_{\beta+2},\quad \ldots,\quad q_n$$

et posons

$$x_i = \psi_i(q_1, q_2, \ldots, q_\beta, q_{\beta+1}, \ldots, q_n),$$

les ψ_i étant des fonctions choisies de façon à se réduire à φ_i pour

$$(15)\qquad q_{\beta+1} = q_{\beta+2} = \ldots = q_n = 0,$$

mais d'ailleurs quelconques.

Si nous adoptons comme variables indépendantes

$$q_1,\quad q_2,\quad \ldots,\quad q_n,$$

alors les équations (15) représenteront précisément nos équations de liaison.

On voit qu'un système à liaisons se comporte comme un système libre à la condition qu'on lui applique certaines forces supplémentaires, dites *forces de liaison*, et dont il est aisé de comprendre la signification. Supposons, par exemple, que deux points du système soient assujettis à rester à une distance constante a; tout se passera comme si ces deux points s'attiraient quand leur distance est supérieure à a et se repoussaient quand elle est inférieure; cette attraction (ou cette répulsion) étant extrêmement grande pour une distance égale à $a+\varepsilon$ (ou à $a-\varepsilon$) à moins que ε ne soit extrêmement petit. Toutes les forces de liaison sont susceptibles d'une interprétation analogue.

Soit alors W l'énergie potentielle due à ces forces de liaison, de telle façon que le travail de ces forces soit représenté par $-dW$. Nous pourrons alors traiter notre système comme s'il était libre, mais à la condition d'ajouter cette énergie potentielle W à celle des forces ordinaires que nous avons appelée U; c'est-à-dire de changer F en F + W. Les équations (12) s'écriront alors

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{d(F+W)}{dp_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{d(F+W)}{dq_i}.$$

Mais le travail des forces de liaison est nul pour tout déplacement compatible avec les liaisons; la fonction W ne varie donc

pas quand les variables (13) varient, les variables (14) restant constamment nulles. On a donc

$$\frac{dW}{dq_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \beta).$$

D'autre part, W dépend seulement des q et pas des p, de sorte que $\frac{dW}{dp_i} = 0$.

Nous pouvons donc écrire, en donnant seulement à l'indice i les valeurs 1, 2, ..., β,

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{dF}{dp_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{dF}{dq_i},$$

de sorte que nous retrouvons les équations de Hamilton.

10. Méthode de Jacobi. — Reprenons les équations canoniques (1). A ces équations se rattache intimement une équation aux dérivées partielles, imaginée par Jacobi, et que nous allons construire.

Soit S la fonction inconnue; dans la fonction $F(x_i, y_i)$ remplaçons y_i par la dérivée partielle $\frac{dS}{dx_i}$ et égalons cette fonction à une constante. Nous obtiendrons ainsi l'équation

$$(16) \qquad F\left(x_i, \frac{dS}{dx_i}\right) = \text{const.}$$

C'est l'équation de Jacobi, et nous allons voir que l'intégration des équations (1) se ramène à celle de l'équation de Jacobi.

Supposons, en effet, qu'on ait trouvé une solution particulière de l'équation (16) dépendant de n constantes arbitraires

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_n.$$

La constante du second membre de (16) sera une fonction de ces n constantes, de sorte qu'on aura

$$(17) \qquad F\left(x_i, \frac{dS}{dx_i}\right) = \varphi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n).$$

La fonction S dépend à la fois des variables x et des constantes d'intégration β; si nous faisons varier à la fois ces variables et ces

constantes, nous aurons

$$dS = \sum \frac{dS}{dx}\,dx + \sum \frac{dS}{d\beta}\,d\beta.$$

Posons

$$(18) \qquad \frac{dS}{dx_i} = y_i, \qquad \frac{dS}{d\beta_i} = \gamma_i.$$

Entre les $4n$ quantités x, y, β, γ, nous avons les $2n$ relations (18). Donc $2\,n$ de ces quantités peuvent être regardées comme fonctions des $2\,n$ autres; par exemple, les β et les γ comme fonctions des x et des y. Cela nous permet de faire un changement de variables et de prendre comme variables nouvelles les β et les γ au lieu des x et des y.

On a

$$dS = \sum y\,dx + \sum \gamma\,d\beta;$$

donc

$$\sum \gamma\,d\beta - \sum x\,dy = d\left(S - \sum xy\right)$$

est une différentielle exacte.

Le changement de variables est donc canonique, et les équations (1) deviennent

$$\frac{d\gamma_i}{dt} = \frac{dF}{d\beta_i}, \qquad \frac{d\beta_i}{dt} = -\frac{dF}{d\gamma_i}$$

ou, à cause de l'identité (17),

$$(19) \qquad \frac{d\gamma_i}{dt} = \frac{d\varphi}{d\beta_i}, \qquad \frac{d\beta_i}{dt} = 0.$$

Ces équations (19) s'intègrent immédiatement, on trouve d'abord

$$\beta_i = \text{const.}$$

Les β étant des constantes, la fonction $\varphi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ sera également une constante et il en sera de même de ses dérivées $\dfrac{d\varphi}{d\beta_i}$. L'intégration de la première équation (19) nous donnera donc

$$\gamma_i = \frac{d\varphi}{d\beta_i}\,t + \varpi_i,$$

les ϖ_i étant n nouvelles constantes d'intégration.

On a donc ainsi intégré complètement les équations (19) et par conséquent les équations (1).

11. Reprenons les équations

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dF}{dy}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dF}{dx}; \tag{1}$$

avec ces équations nous pouvons former les équations de Jacobi

$$F\left(x_i, \frac{dS}{dx_i}\right) = \text{const.} \tag{16}$$

Faisons un changement canonique de variables; soient q et p les variables nouvelles, de telle façon que

$$\sum q\,dp - \sum x\,dy = dV$$

soit une différentielle exacte et que les équations (1) deviennent

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{dF}{dp_i}; \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{dF}{dq_i}. \tag{1 bis}$$

Je désignerai par $F(q;p)$ ce que devient $F(x,y)$ quand on y remplace les x et les y par leurs valeurs en fonctions des q et des p; je mets un point-virgule entre q et p pour éviter toute confusion et afin que $F(q,p)$ ne semble pas être le résultat de la substitution de q à x et de p à y dans la fonction F.

Nous pouvons appliquer aux équations (1 *bis*) la méthode de Jacobi, en remplaçant dans F la variable p_i par la dérivée partielle $\frac{dS'}{dq_i}$, ce qui donne l'équation

$$F\left(q_i; \frac{dS'}{dq_i}\right) = \text{const.} \tag{16 bis}$$

Les fonctions S′ qui satisfont à l'équation (16 *bis*) sont-elles les mêmes que les fonctions S qui satisfont à l'équation (16)? *Non, en général.*

En effet, je puis remplacer l'équation (16) par

$$F(x_i, y_i) = \text{const.} \qquad dS = \sum y\,dx$$

et l'équation (16 *bis*) par

$$F(q_i; p_i) = \text{const.} \qquad dS = \sum p\,dp.$$

L'équation $F(q; p) = \text{const.}$ est bien une conséquence de l'équation $F(x, y) = \text{const.}$; mais on trouve

$$dS' - dS = \sum p\,dq - \sum y\,dx = d\left(\sum pq - \sum xy - V\right),$$

d'où

$$S' - S = \sum pq - \sum xy - V.$$

Le second membre n'est pas nul en général.

Il y a cependant un cas où les fonctions S' sont les mêmes que les fonctions S; c'est celui des équations de Hamilton et du changement de variables du n° 8.

Nous avons trouvé en effet au n° 8

$$\sum y\,dx = \sum p\,dq,$$

d'où l'on tire

$$dS' = dS, \qquad S' = S.$$

En d'autres termes, *dans le cas des équations de Hamilton,* si dans l'équation (16) on remplace les x par leurs expressions en fonctions des q et les dérivées partielles $\frac{dS}{dx}$ par leurs expressions en fonction des q et des dérivées partielles $\frac{dS}{dq}$, l'équation transformée s'écrira

$$F\left(q_i; \frac{dS}{dq_i}\right) = \text{const.},$$

ce qui n'est pas autre chose que l'équation (16 *bis*) où S' a été remplacée par S.

12. Cas où le temps figure explicitement. — Supposons que la fonction F dépende non seulement des x et des y mais du temps t, et envisageons encore les équations (1); *elles n'admettront plus l'intégrale des forces vives*

$$F = \text{const.}$$

Il est aisé toutefois de ramener l'étude des équations (1) dans le cas où le temps figure explicitement dans la fonction F à l'étude de ces mêmes équations dans le cas où il n'y figure pas; cas qui est le seul que nous avons envisagé jusqu'ici.

Introduisons deux variables auxiliaires u et v et posons

$$F' = F(x_i, y_i; u) - v,$$

où $F(x_i, y_i; u)$ est la fonction F où t a été remplacé par u. Considérons les équations

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dF'}{dy}, & \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{dF'}{dx}, \\[2ex] \dfrac{du}{dt} = \dfrac{dF'}{dv}, & \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{dF'}{du}. \end{cases}$$

Ces équations ont la forme canonique.

La troisième des équations (20) nous donne

$$\frac{du}{dt} = 1,$$

d'où $u = t$; les deux premières ne sont autre chose que les équations (1); car, quand on fait $u = t$, il vient

$$\frac{dF'}{dy} = \frac{dF}{dy}, \qquad \frac{dF'}{dx} = \frac{dF}{dx}.$$

Quant à la quatrième, elle définit la variable v, que l'on pourrait également définir à l'aide de l'intégrale des forces vives des équations (20)

$$F(x_i, y_i; u) - v = \text{const.}$$

Supposons maintenant que l'on fasse un changement de variables et que les variables nouvelles x' et y' soient des fonctions des variables anciennes x et y et du temps t.

1° *Si la différence*

$$\sum x'\,dy' - \sum x\,dy$$

est une différentielle exacte.

L'expression

$$\left(\sum x'\,dy' + u\,dv\right) - \left(\sum x\,dy - u\,dv\right)$$

sera une différentielle exacte : ce qui veut dire que les équations (20) conserveront leur forme canonique, quand, conservant les deux dernières variables, u et v, on prendra pour variables nouvelles x'_i, y'_i, u et v, au lieu de x_i, y_i, u et v. *Les équations* (1) qui ne sont autre chose que les deux premières équations (20) *conserveront donc aussi leur forme.*

2° *Si l'expression*

$$\sum x'\,dy' - \sum x\,dy$$

devient une différentielle exacte quand on y regarde t comme une constante.

Nous aurons, quand t sera regardée comme variable,

$$\sum x'\,dy' - \sum x\,dy = dS + W\,dt,$$

dS étant une différentielle exacte et W une fonction des x, des y et de t, ou, si l'on aime mieux, des x', des y' et de t.

Ou bien, en remplaçant t par u,

$$\sum x'\,dy' - \sum x\,dy = dS + W\,du.$$

Posons alors

$$v' = v + W;$$

nous voyons que

$$\left(\sum x'\,dy' + u\,dv'\right) - \left(\sum x\,dy + u\,dv\right) = d(S + uW)$$

est une différentielle exacte.

Si donc nous prenons pour variables nouvelles x'_i, y'_i, u et v' au lieu de x_i, y_i, u et v, les équations (20) conserveront la forme canonique.

Mais nous aurons, avec les variables nouvelles,

$$F' = F - v' - W$$

et

$$\frac{dF'}{dx'} = \frac{d(F - W)}{dx'}, \qquad \frac{dF'}{dy'} = -\frac{d(F - W)}{dy'}.$$

Les deux premières équations (20) deviennent donc

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{d(F - W)}{dy'}, \qquad \frac{dy'}{dt} = -\frac{d(F - W)}{dx'}.$$

On voit que *les équations* (1) *ont encore la forme canonique, mais que la fonction* F *est remplacée par* F — W.

3° *Si les variables x' et y' sont des fonctions des x et des y seulement et pas du temps t et si*

$$\sum x'\,dy' - \sum x\,dy$$

est une différentielle exacte.

Nous retombons sur le premier cas et *les équations* (1) *conservent la forme canonique avec la même fonction* F.

Quel résultat nous donne maintenant la méthode de Jacobi appliquée aux équations (20)? Appliquons la règle. Posons

$$\frac{dS}{dx_i} = y_i, \qquad \frac{dS}{du} = v$$

et égalons F′ à une constante, nous trouvons

$$F\left(x_i, \frac{dS}{dx_i}, u\right) - \frac{dS}{du} = \text{const.},$$

ou, en remplaçant u par t,

$$F\left(x_i, \frac{dS}{dx_i}, t\right) + \frac{dS}{dt} = \text{const.}$$

Telle est la forme de l'équation de Jacobi dans le cas qui nous occupe.

13. **Crochets de Jacobi.** — Revenons au cas où le temps ne figure pas explicitement dans la fonction F.

Soient F_1 et F_2 deux fonctions quelconques des x_i et des y_i.

Nous désignerons par la notation $[F_1, F_2]$ l'expression suivante :

$$[F_1, F_2] = \sum\left(\frac{dF_1}{dx_i}\frac{dF_2}{dy_i} - \frac{dF_1}{dy_i}\frac{dF_2}{dx_i}\right).$$

C'est le *crochet de Jacobi*.

Nous trouvons immédiatement, en vertu des équations (1),

$$\frac{dF_1}{dt} = \sum\left(\frac{dF_1}{dx_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{dF_1}{dy_i}\frac{dy_i}{dt}\right) = \sum\left(\frac{dF_1}{dx_i}\frac{dF}{dy_i} - \frac{dF_1}{dy_i}\frac{dF}{dx_i}\right),$$

c'est-à-dire

$$\frac{dF_1}{dt} = [F_1, F].$$

Cela veut dire que la condition nécessaire et suffisante pour que $F_1 = \text{const.}$ soit une intégrale des équations (1), c'est que le crochet $[F_1, F]$ soit nul.

Si A, B et C sont trois fonctions quelconques, on vérifie aisément l'identité

$$\big[[A, B], C\big] + \big[[B, C], A\big] + \big[[C, A], B\big] = 0.$$

Supposons donc que $F_1 = \text{const.}$, $F_2 = \text{const.}$ soient deux intégrales des équations (1); je dis que $[F_1, F_2] = \text{const.}$ sera une troisième intégrale. C'est le théorème de Poisson.

En effet, nous avons l'identité

$$\big[[F, F_1], F_2\big] + \big[[F_1, F_2], F\big] + \big[[F_2, F], F_1\big] = 0.$$

Le premier et le dernier terme s'annulent, parce que F_1 et F_2 étant des intégrales $[F, F_1] = -[F_1, F]$ et $[F_2, F]$ doivent s'annuler. Le second terme sera donc nul et l'on aura

$$\big[[F_1, F_2], F\big] = 0,$$

ce qui exprime que $[F_1, F_2]$ est une intégrale.

Pour plus de détails, je renverrai à mon Ouvrage sur *les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*. On verra, en particulier, aux nos 56, 69, 70 et 71 (t. I, p. 166, et 192 à 198) quels sont les rapports entre les crochets de Jacobi et ceux de Lagrange que nous allons bientôt définir, et l'on trouvera à la page 169 (t. I) une nouvelle démonstration du théorème de Poisson.

Dans le Tome III on verra les rapports des crochets de Jacobi avec les invariants intégraux et, en particulier, au n° 255, page 43, on trouvera une généralisation du théorème de Poisson.

Je n'insisterai pas ici sur toutes ces considérations.

14. Crochets de Lagrange. — Supposons que les équations (1) ayant été intégrées, les x_i et les y_i se trouvent exprimés en fonction du temps t et des $2n$ constantes d'intégration α_k.

Je désignerai par la notation $[\alpha_h, \alpha_k]$ l'expression suivante :

$$[\alpha_h, \alpha_k] = \sum_i \left(\frac{dx_i}{d\alpha_h} \frac{dy_i}{d\alpha_k} - \frac{dx_i}{d\alpha_k} \frac{dy_i}{d\alpha_h} \right).$$

Ce sont les *crochets de Lagrange* qu'il faut se garder de confondre avec ceux de Jacobi.

Nous avons vu au n° 2 que les équations (1) entraînent les suivantes :

$$(4) \qquad \frac{d}{dt} \sum x \frac{dy}{d\alpha_k} - \frac{d}{d\alpha_k} \sum x \frac{dy}{dt} = \frac{dF}{d\alpha_k},$$

ce que je puis écrire

$$(21) \qquad \frac{d}{dt} \sum x \frac{dy}{d\alpha_k} = \frac{d}{d\alpha_k} \left(F + \sum x \frac{dy}{dt} \right).$$

J'aurai de même

$$(22) \qquad \frac{d}{dt} \sum x \frac{dy}{d\alpha_h} = \frac{d}{d\alpha_h} \left(F - \sum x \frac{dy}{dt} \right).$$

Je différentie (21) par rapport à α_h et (22) par rapport à α_k et je retranche. Les seconds membres se détruisent et il reste

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d}{d\alpha_h} \sum x \frac{dy}{d\alpha_k} - \frac{d}{d\alpha_k} \sum x \frac{dy}{d\alpha_h} \right) = 0$$

ou

$$\frac{d}{dt} \sum \left(\frac{dx}{d\alpha_h} \frac{dy}{d\alpha_k} - \frac{dx}{d\alpha_k} \frac{dy}{d\alpha_h} \right) = \frac{d[\alpha_h, \alpha_k]}{dt} = 0,$$

ce qui signifie que (α_h, α_k) est une constante indépendante du temps et pouvant dépendre seulement des constantes d'intégration α.

15. Remarquons, de plus, que nous aurons les identités

$$(23)\qquad \frac{d[\alpha_h, \alpha_k]}{d\alpha_j} + \frac{d[\alpha_k, \alpha_j]}{d\alpha_h} + \frac{d[\alpha_j, \alpha_h]}{d\alpha_k} = 0;$$

$$[\alpha_k, \alpha_k] = 0, \qquad [\alpha_h, \alpha_k] = -[\alpha_k, \alpha_h],$$

qui sont des conséquences immédiates de la définition des crochets de Lagrange.

Pour démontrer la première de ces identités, nous n'avons qu'à écrire

$$[\alpha_h, \alpha_k] = \frac{d}{d\alpha_h}\sum x\frac{dy}{d\alpha_k} - \frac{d}{d\alpha_k}\sum x\frac{dy}{d\alpha_h},$$

$$[\alpha_k, \alpha_j] = \frac{d}{d\alpha_k}\sum x\frac{dy}{d\alpha_j} - \frac{d}{d\alpha_j}\sum x\frac{dy}{d\alpha_k},$$

$$[\alpha_j, \alpha_h] = \frac{d}{d\alpha_j}\sum x\frac{dy}{d\alpha_h} - \frac{d}{d\alpha_h}\sum x\frac{dy}{d\alpha_j}.$$

Si nous différentions la première de ces relations par rapport à α_j, la deuxième par rapport à α_h, la troisième par rapport à α_k et que nous ajoutions, nous constaterons immédiatement que les différents termes du second membre se détruisent deux à deux. Le premier membre doit être égal à zéro, ce qui démontre la première identité (23).

16. Reprenons l'équation (21) et écrivons-la

$$\frac{d}{dt}\sum x\frac{dy}{d\alpha_k} = \frac{d^2\Omega}{dt\,d\alpha_k},$$

en introduisant une fonction Ω définie par l'équation

$$\frac{d\Omega}{dt} = \mathrm{F} + \sum x\frac{dy}{dt} = \mathrm{F} - \sum x\frac{d\mathrm{F}}{dx}.$$

Cette fonction Ω étant définie par sa dérivée partielle par rapport à t n'est définie qu'à une fonction arbitraire près des constantes α.

Notre équation nous donne, par intégration,

$$\sum x\frac{dy}{d\alpha_k} = \frac{d\Omega}{d\alpha_k} + \mathrm{A}_k,$$

A_k étant une fonction des constantes α *indépendante du temps*.

D'autre part, nous avons

$$\sum x \frac{dy}{dt} = \frac{d\Omega}{dt} - \text{F},$$

et comme

$$d\Omega = \sum \frac{d\Omega}{d\alpha_k} d\alpha_k + \frac{d\Omega}{dt} dt,$$

$$dy = \sum \frac{dy}{d\alpha_k} d\alpha_k + \frac{dy}{dt} dt,$$

il viendra

(24) $$\sum x\, dy = d\Omega + \sum \text{A}_k\, d\alpha_k - \text{F}\, dt,$$

les A_k étant indépendants du temps.

De là nous déduisons immédiatement

$$[\alpha_h, \alpha_k] = \frac{d\text{A}_k}{d\alpha_h} - \frac{d\text{A}_h}{d\alpha_k}.$$

Comme A_k et A_h sont des fonctions des α seulement ne dépendant pas de t, il en sera de même de leurs dérivées partielles, et, par conséquent, du crochet $[\alpha_h, \alpha_k]$. Nous retrouvons donc le théorème du n° 14.

17. Nous pouvons choisir comme constantes d'intégration les valeurs initiales x_i^0, y_i^0 de x_i et y_i pour $t = 0$. Dans ce cas, l'équation (24) prend une forme remarquablement simple.

Faisons $t = 0$ dans cette équation (24). Nous voyons que dt sera nul, que x_i et y_i se réduisent à x_i^0 et y_i^0; d'autre part, Ω se réduira à Ω_0; les A_k, qui sont des constantes indépendantes du temps, ne changeront pas. Il viendra donc

$$\sum x^0\, dy^0 = d\Omega_0 + \sum \text{A}_k\, d\alpha_k,$$

ou, en retranchant de (24),

(25) $$\sum x\, dy = d(\Omega - \Omega_0) + \sum x^0\, dy^0 - \text{F}\, dt.$$

18. Dans le cas particulier des équations de Hamilton, on a (avec les notations du n° 7)

$$\text{F} = \text{T} + \text{U},$$

U est indépendant des y et T est homogène du second degré par rapport aux y; on a donc

$$T = \frac{1}{2}\sum y \frac{dT}{dy} = \frac{1}{2}\sum y \frac{dF}{dy}.$$

D'autre part, on a

$$\frac{d}{dt}\sum xy = \sum x \frac{dy}{dt} + \sum y \frac{dx}{dt} = \sum y \frac{dF}{dy} - \sum x \frac{dF}{dx},$$

et, par conséquent,

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{d\Sigma xy}{dt} + F - \sum y \frac{dF}{dy},$$

et, enfin,

$$(26) \qquad \frac{d\Omega}{dt} = \frac{d\Sigma xy}{dt} + U - T.$$

19. Dans le cas particulier du problème des trois corps, l'énergie potentielle U est homogène de degré -1 par rapport aux x, et T, qui reste homogène de degré 2 par rapport aux y, ne dépend pas des x.

Le théorème des fonctions homogènes donne alors

$$-U = \sum x \frac{dU}{dx} = \sum x \frac{dF}{dx},$$

$$2T = \sum y \frac{dT}{dy} = \sum y \frac{dF}{dy},$$

d'où

$$(26) \qquad 2F = \sum y \frac{dF}{dy} - 2\sum x \frac{dF}{dx}.$$

Dans ce cas, il est aisé de former la fonction Ω; on trouve, en effet,

$$\frac{d\Omega}{dt} = F - \sum x \frac{dF}{dx},$$

$$\frac{d\Sigma xy}{dt} = \sum y \frac{dF}{dy} - \sum x \frac{dF}{dx},$$

d'où

$$\frac{d(\Omega + \Sigma xy)}{dt} = F + \sum y \frac{dF}{dy} - \sum x \frac{dF}{dx} = 3F.$$

Comme F est une constante en vertu de l'équation des forces

vives, cette équation s'intègre immédiatement et l'on trouve

$$\Omega = 3Ft - \sum xy = \text{const.}$$

On peut d'ailleurs remplacer la constante par une fonction arbitraire des constantes d'intégration.

Soit, maintenant,

$$J = 2\sum x\frac{dy}{d\alpha} - \sum y\frac{dx}{d\alpha},$$

on trouve

$$J = \sum x\frac{dy}{d\alpha} - \frac{d}{d\alpha}\left(\sum xy\right);$$

d'où

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum x\frac{dy}{d\alpha}\right) - \frac{d^2\Sigma xy}{d\alpha\, dt}$$

ou

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{d^2(\Omega - \Sigma xy)}{d\alpha\, dt},$$

ou, enfin,

$$\frac{dJ}{dt} = 3\frac{dF}{d\alpha}.$$

En vertu de l'équation des forces vives, F est une constante; c'est donc une fonction des $2n$ constantes d'intégration α; et il en est de même de sa dérivée partielle $\frac{dF}{d\alpha}$ par rapport à une de ces constantes.

Donc $\frac{dF}{d\alpha}$ est une constante.

L'équation précédente nous apprend donc que J est une fonction linéaire du temps.

Ce résultat se rattache intimement à la théorie des invariants et, en particulier, de l'invariant relatif que j'ai étudié au n° 256 du Tome III de mon Ouvrage sur *les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*.

Je me bornerai à renvoyer le lecteur aux Chapitres XXII, XXIII et XXIV de cet Ouvrage et aussi aux pages 169 et suivantes du Tome I[er].

On verra également, dans ces Chapitres, comment la théorie des crochets de Lagrange se rattache à celle des invariants intégraux.



CHAPITRE II.

LE PROBLÈME DES TROIS CORPS.

20. Notations. — Considérons trois corps A, B, C qui s'attirent conformément à la loi de Newton. J'adopterai les notations du n° 7, c'est-à-dire que je désignerai par

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3$$

les trois coordonnées du corps A, par

$$x_4, \quad x_5, \quad x_6$$

celles du corps B, par

$$x_7, \quad x_8, \quad x_9$$

celles du corps C.

Quant aux masses, je désignerai celle du corps A *indifféremment* par

$$m_1, \quad m_2 \quad \text{ou} \quad m_3,$$

celle du corps B, par

$$m_4, \quad m_5 \quad \text{ou} \quad m_6,$$

celle du corps C, par

$$m_7, \quad m_8 \quad \text{ou} \quad m_9,$$

de sorte qu'on aura

$$m_1 = m_2 = m_3,$$

$$m_4 = m_5 = m_6.$$

$$m_7 = m_8 = m_9.$$

Je poserai

$$y_i = m_i \frac{dx_i}{dt},$$

de sorte que les trois composantes de la quantité de mouvement seront, pour le corps A : y_1, y_2 et y_3; pour le corps B : y_4, y_5 et y_6; pour le corps C : y_7, y_8 et y_9.

L'énergie cinétique totale sera alors

$$T = \frac{1}{2}\sum m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum \frac{y^2}{m}.$$

L'énergie potentielle sera

$$(1) \qquad U = -\frac{m_1 m_4}{AB} - \frac{m_1 m_7}{AC} - \frac{m_4 m_7}{BC},$$

à la condition que l'on ait choisi les unités de telle sorte que la « constante de Gauss » soit égale à 1 ; nous pouvons le faire sans inconvénient, car il sera toujours aisé de rétablir l'homogénéité à la fin du calcul.

Dans l'expression de U, les dénominateurs AB, AC, BC représentent les distances AB, AC, BC.

L'énergie totale sera

$$F = T - U,$$

et nos équations canoniques s'écriront (d'après le n° 7)

$$(2) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}.$$

Nous désignerons d'ordinaire les trois axes de coordonnées sous les noms de *axe des* x_1, *axe des* x_2, *axe des* x_3.

21. **Intégrales diverses.** — Le problème des trois corps, dont les équations sont les équations canoniques (2) du numéro précédent, admettent un certain nombre d'intégrales simples.

Nous avons d'abord l'*intégrale des forces vives*

$$F = \text{const.}$$

Observons ensuite que notre fonction U ne dépend que des distances mutuelles des trois corps A, B, C; elle est donc indépendante du choix des axes; elle ne change pas quand on imprime au système des trois corps un mouvement commun de translation ou de rotation.

Imprimons donc à ce système une translation infiniment petite ε

dans le sens de l'axe des x_1. Alors

$$x_1, \quad x_4, \quad x_7$$

se changeront en

$$x_1+\varepsilon, \quad x_4+\varepsilon, \quad x_7+\varepsilon,$$

et les autres x ne changeront pas.

L'accroissement de U devant être nul, on aura

$$\frac{dU}{dx_1}+\frac{dU}{dx_4}+\frac{dU}{dx_7}=0. \tag{3}$$

Mais il convient ici d'introduire une notation qui nous sera très utile dans la suite.

Nous écrirons par exemple

$$\sum\nolimits_3 \varphi(x_1)=\varphi(x_1)+\varphi(x_4)+\varphi(x_7),$$

$$\sum\nolimits_3 \varphi(x_2)=\varphi(x_2)+\varphi(x_5)+\varphi(x_8),$$

$$\sum\nolimits_3 \varphi(x_1, y_2)=\varphi(x_1, y_2)+\varphi(x_4, y_5)+\varphi(x_7, y_8),$$

. . . .,

c'est-à-dire que le signe $\sum_3$, qui peut se prononcer, *somme de trois en trois,* a la signification suivante ; il représente une somme de trois termes ; le premier est celui qui est explicitement formulé, le second se déduit du premier en augmentant tous les indices de trois unités et le troisième en les augmentant de six unités.

Ou, si l'on aime mieux, le second terme sera formé avec les coordonnées du point B, et le troisième avec les coordonnées du point C, comme le premier avec les coordonnées correspondantes du point A.

Dans le cas où l'on envisagerait non plus trois corps, mais n corps, on pourrait évidemment employer la même notation, mais le signe $\sum_3$ représentera non plus une somme de trois termes, mais une somme de n termes.

Quand, au contraire, nous emploierons le signe $\sum$ sans l'indice 3, la sommation devra être étendue à toutes les valeurs possibles des indices.

Avec cette notation, l'équation (3) s'écrit

$$\sum_3 \frac{dU}{dx_1} = 0,$$

ou comme T ne dépend pas des x

$$\sum_3 \frac{dF}{dx_1} = 0,$$

d'où

$$\sum_3 \frac{dy_1}{dt} = 0,$$

d'où enfin

$$(4) \qquad \sum_3 y_1 = \text{const.}$$

Le premier membre de l'équation (4) peut s'écrire

$$y_1 + y_4 + y_7 = m_1 \frac{dx_1}{dt} + m_4 \frac{dx_4}{dt} + m_7 \frac{dx_7}{dt},$$

c'est donc la projection sur l'axe des x_1 de la quantité de mouvement du centre de gravité du système où la masse totale

$$m_1 + m_4 + m_7$$

serait supposée concentrée.

On trouverait de même

$$(4\ bis) \qquad \sum_3 y_2 = \text{const.}; \qquad \sum_3 y_3 = \text{const.},$$

ce qui montre que les projections sur les trois axes de la quantité de mouvement du centre de gravité sont constantes. Le premier membre de (4) est la dérivée de $\sum_3 m_1 x_1$; en intégrant (4) et (4 *bis*) on verra donc que

$$\sum_3 m_1 x_1, \quad \sum_3 m_2 x_2, \quad \sum_3 m_3 x_3$$

sont des fonctions linéaires du temps; c'est-à-dire que le mouvement du centre de gravité du système est rectiligne et uniforme.

Nous ne restreindrons pas la généralité en supposant que le centre de gravité est fixe. Nous savons en effet que les lois du mouvement restent les mêmes, que le système mobile soit rap-

porté à des axes fixes, ou qu'il soit rapporté à des axes animés d'une translation rectiligne et uniforme.

Si nous choisissons alors des axes mobiles, parallèles aux axes fixes, et ayant leur origine au centre de gravité; la translation de ces axes sera rectiligne et uniforme de sorte que la loi du mouvement ne sera pas altérée; pour un observateur lié à ces axes mobiles, le centre de gravité paraîtra d'ailleurs fixe.

22. **Intégrales des aires.** — Imprimons maintenant au système des trois corps une rotation infiniment petite ε autour de l'axe des x_1.

Les coordonnées x_1, x_4, x_7 ne changeront pas; tandis que x_2, x_5, x_8 deviendront

$$x_2 - x_3\varepsilon, \quad x_5 - x_6\varepsilon, \quad x_8 - x_9\varepsilon,$$

et que x_3, x_6, x_9 deviendront

$$x_3 + x_2\varepsilon, \quad x_6 + x_5\varepsilon, \quad x_9 + x_8\varepsilon,$$

et comme U ne doit pas changer, nous aurons

$$\sum_3 \left(x_3 \frac{dU}{dx_2} - x_3 \frac{dU}{dx_3} \right) = 0,$$

ou, puisque T ne dépend pas des x,

$$\sum_3 \left(x_3 \frac{dF}{dx_2} - x_2 \frac{dF}{dx_3} \right) = 0,$$

ou, à cause des équations (2),

$$\sum_3 \left(x_3 \frac{dy_2}{dt} - x_2 \frac{dy_3}{dt} \right) = 0,$$

ou

$$\frac{d}{dt} \sum_3 (x_3 y_2 - x_2 y_3) = 0,$$

puisque l'on a identiquement

$$y_2 \frac{dx_3}{dt} - y_3 \frac{dx_2}{dt} = 0.$$

On trouve donc en intégrant

$$\sum_3 (x_3 y_2 - x_2 y_3) = \text{const.} \tag{5}$$

et l'on trouverait de même

$$(5\ bis)\quad \sum_3 (x_2 y_1 - x_1 y_2) = \text{const.}\qquad \sum_3 (x_1 y_3 - x_3 y_1) = \text{const.}$$

Les équations (5) et (5 *bis*) sont connues sous le nom d'*intégrales des aires*.

Il est évident que ce que nous venons de dire du mouvement du centre de gravité, ou des intégrales des aires s'appliquerait sans aucun changement au cas où il y aurait plus de trois corps.

Considérons le vecteur dont les trois composantes sont

$$-\sum_3 (x_3 y_2 - x_2 y_3),\quad -\sum_3 (x_1 y_3 - x_3 y_1),\quad -\sum_3 (x_2 y_1 - x_1 y_2);$$

d'après les équations (5) et (5 *bis*) ce vecteur est constant en grandeur et direction. Il a reçu le nom de *vecteur des aires;* et le plan qui lui est perpendiculaire s'appelle ordinairement *plan invariable*.

Si l'on prend le plan invariable pour plan des $x_1\ x_2$, le vecteur des aires a pour composantes

$$0,\quad 0,\quad \sum_3 (x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

23. **Changement de variables.** — Le problème des trois corps comporte neuf degrés de liberté, c'est-à-dire que nous avons dix-huit variables x et y. On peut profiter de la propriété du centre de gravité pour réduire le nombre des degrés de liberté et par conséquent celui des variables indépendantes tout en conservant la forme canonique des équations. C'est là l'objet des changements de variables que nous allons étudier.

Je désignerai nos nouvelles variables par

$$x'_i,\quad y'_i,$$
$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 9.$$

Je supposerai d'abord que

$$x'_1,\quad x'_4,\quad x'_7$$

sont des fonctions linéaires de

$$x_1,\quad x_4,\quad x_7;$$

et de même que x'_2, x'_5, x'_8 sont des fonctions linéaires de x_2, x_5, x_8, et x'_3, x'_6, x'_9 de x_3, x_6, x_9.

Je supposerai de plus que les relations linéaires qui lient x'_1, x'_4, x'_7 à x_1, x_4, x_7 sont *les mêmes* que celles qui lient x'_2, x'_5, x'_8 à x_2, x_5, x_8 et les mêmes encore que celles qui lient x'_3, x'_6, x'_9 à x_3, x_6, x_9.

En d'autres termes, si l'on regarde les x' comme les coordonnées de trois corps fictifs, il y aura entre les coordonnées de ces corps fictifs et celles des trois corps réels des relations linéaires indépendantes du choix des axes.

De même pour les y'. Je supposerai que y'_1, y'_4, y'_7 sont des fonctions linéaires de y_1, y_4, y_7, que y'_2, y'_5, y'_8 sont des fonctions linéaires de y_2, y_5, y_8 et y'_3, y'_6, y'_9 de y_3, y_6, y_9.

Je supposerai que les relations linéaires qui lient y'_1, y'_4, y'_7 à y_1, y_4, y_7 sont les mêmes que celles qui lient y'_2, y'_5, y'_8 à y_2, y_5, y_8, ou bien encore y'_3, y'_6, y'_9 à y_3, y_6, y_9.

Je supposerai enfin que ces relations linéaires sont telles que l'on ait identiquement

$$\sum_3 x'_1 y'_1 = \sum_3 x_1 y_1. \tag{6}$$

Comme y'_2, y'_5, y'_8 sont liés à y_2, y_5, y_8 par les mêmes relations que y'_1, y'_4, y'_7 à y_1, y_4, y_7, on peut, dans l'identité (6), remplacer y_1, y_4, y_7, y'_1, y'_4, y'_7 par y_2, y_5, y_8, y'_2, y'_5, y'_8, ce qui donne

$$\sum_3 x'_1 y'_2 = \sum_3 x_1 y_2.$$

De même, comme x'_2, x'_5, x'_8 sont liés à x_2, x_5, x_8 par les mêmes relations que x'_1, x'_4, x'_7 à x_1, x_4, x_7, on aura

$$\sum_3 x'_2 y'_1 = \sum_3 x_2 y_1$$

et de même :

$$\sum_3 x'_2 y'_2 = \sum_3 x_2 y_2; \qquad \sum_3 x'_1 y'_3 = \sum_3 x_1 y_3,$$

et plus généralement

$$\sum_3 x'_i y'_k = \sum_3 x_i y_k,$$

où l'indice i peut prendre une quelconque des trois valeurs 1, 2, 3, et où il en est de même de l'indice k.

On aura donc en particulier

$$\sum_3 x'_3 y'_2 = \sum_3 x_3 y_2, \qquad \sum_3 x'_2 y'_3 = \sum_3 x_2 y_3;$$

d'où

$$\sum_3 (x'_3 y'_2 - x'_2 y'_3) = \sum_3 (x_3 y_2 - x_2 y_3).$$

et de même

$$\sum_3 (x'_1 y'_3 - x'_3 y'_1) = \sum_3 (x_1 y_3 - x_3 y_1)$$

$$\sum_3 (x'_2 y'_1 - x'_1 y'_2) = \sum_3 (x_2 y_1 - x_1 y_2).$$

Notre changement de variables n'altère donc pas la forme des intégrales des aires.

D'autre part, on a :

$$\sum_3 x'_1 y'_1 = \sum_3 x_1 y_1, \quad \sum_3 x'_2 y'_2 = \sum_3 x_2 y_2, \quad \sum_3 x'_3 y'_3 = \sum_3 x_3 y_3;$$

ou en ajoutant

$$\sum x'_i y'_i = \sum x_i y_i. \tag{7}$$

le signe $\sum$ sans indice 3 indiquant, comme nous l'avons dit, une sommation étendue à toutes les valeurs de l'indice i.

Mais si l'on se reporte au n° 5, on voit que l'équation (7) signifie que le changement de variables est un *changement canonique*. Il n'altère donc pas la forme canonique des équations (2) qui deviennent :

$$\frac{dx'_i}{dt} = \frac{dF}{dy'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{dF}{dx'_i}. \tag{8}$$

24. Élimination du centre de gravité. — Voici maintenant l'usage que l'on peut faire de ce changement de variables. Je suppose que l'on ait choisi les relations linéaires qui lient les variables nouvelles aux anciennes de telle façon que l'on ait

$$k' y'_7 = y_1 + y_4 + y_7,$$

et, d'autre part, que x'_1 et x'_4 ne dépendent que des différences $x_1 - x_7$ et $x_4 - x_7$.

Alors y'_7 est à un facteur constant près la quantité de mouvement du centre de gravité; et, comme nous avons vu qu'on peut toujours supposer ce centre de gravité fixe, on aura

$$y'_7 = 0,$$

et de même

$$y'_8 = y'_9 = 0.$$

On devra donc avoir, par conséquent,

$$\frac{dy'_7}{dt} = -\frac{dF}{dx'_7} = 0,$$

ce qui montre que F ne dépend pas de x'_7. C'est, en effet, ce qui doit arriver si les relations linéaires entre les nouvelles et anciennes variables sont telles que x'_1 et x'_4 dépendent seulement des différences $x_1 - x_7$ et $x_4 - x_7$.

Dans ce cas, en effet, T, qui ne dépend que des y et pas des x, ne peut dépendre que des y' et pas des x'; U, qui dépend seulement des différences $x_1 - x_7$, $x_4 - x_7$, $x_2 - x_8$, $x_5 - x_8$, $x_3 - x_9$, $x_6 - x_9$, dépendra seulement des variables x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5, x'_6, qui sont liées à ces différences par des relations linéaires, mais ne dépendra pas de x'_7, x'_8, x'_9. Donc $F = T + U$ ne dépendra pas de x'_7, x'_8, x'_9.

D'ailleurs, il est aisé de voir que nos deux hypothèses ne sont pas indépendantes l'une de l'autre et que, si y'_7 est proportionnel à $y_1 + y_4 + y_7$, les variables x'_1 et x'_4 ne dépendent que des différences $x_1 - x_7$ et $x_4 - x_7$. En effet, reprenons l'égalité (6) que j'écris, en la développant :

$$x_1 y_1 + x_4 y_4 + x_7 y_7 = x'_1 y'_1 + x'_4 y'_4 + x'_7 y'_7.$$

Donnant à x_1, x_4, x_7 des valeurs égales ; le premier membre devient proportionnel à $y_1 + y_4 + y_7$, c'est-à-dire à y'_7 ; dans le second membre de notre identité, les coefficients de y'_1 et de y'_4 doivent donc s'annuler; donc x'_1 et x'_4 s'annulent en même temps que les différences $x_1 - x_7$ et $x_4 - x_7$, ce qui démontre que x'_1 et x'_4 sont liés à ces différences par des relations linéaires.

Nous supposerons donc que y'_7 soit proportionnel à $y_1 + y_4 + y_7$

et que x'_1 et x'_4 ne dépendent que des différences $x_1 - x_7$ et $x_4 - x_7$.

Alors F ne dépend pas de x'_7, x'_8, x'_9, et l'on a

$$y'_7 = y'_8 = y'_9 = 0.$$

On n'aura donc à s'inquiéter que des douze variables $x'_1, x'_2, \ldots, x'_6$; $y'_1, y'_2, \ldots, y'_6$; et le nombre des degrés de liberté sera réduit à six.

25. Élimination des nœuds. — Envisageons une première planète fictive dont les coordonnées soient x'_1, x'_2, x'_3 et dont la quantité de mouvement ait pour composantes y'_1, y'_2, y'_3.

Le plan de l'orbite instantanée de cette planète fictive, c'est-à-dire le plan qui passe par l'origine, par la planète et par sa vitesse sera parallèle aux deux vecteurs qui ont pour composantes x'_1, x'_2, x'_3, et y'_1, y'_2, y'_3. Il sera donc perpendiculaire au vecteur V, qui a pour composantes

$$x'_2 y'_3 - x'_3 y'_2, \quad x'_3 y'_1 - x'_1 y'_3, \quad x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1.$$

Envisageons maintenant une seconde planète fictive, dont les coordonnées soient x'_4, x'_5, x'_6 et dont la quantité de mouvement ait pour composantes y'_4, y'_5, y'_6.

Le plan de l'orbite instantanée de cette planète fictive sera perpendiculaire au vecteur V′, qui a pour composantes

$$x'_5 y'_6 - x'_6 y'_5, \quad x'_6 y'_4 - x'_4 y'_6, \quad x'_4 y'_5 - x'_5 y'_4.$$

D'autre part, le vecteur des aires qui a pour composantes

$$\sum_3 (x'_2 y'_3 - x'_3 y'_2), \quad \sum_3 (x'_3 y'_1 - x'_1 y'_3), \quad \sum_3 (x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1)$$

est perpendiculaire au plan invariable.

Mais les sommes que nous représentons par Σ_3 n'ont plus que deux termes; le troisième terme s'annule de lui-même puisque y'_7, y'_8 et y'_9 sont nuls.

Chaque composante du vecteur des aires est donc la somme des composantes correspondantes de V et V′. Le vecteur des aires est donc la somme géométrique des deux vecteurs V et V′. Les trois vecteurs sont donc dans un même plan.

Donc, les trois plans, qui sont respectivement perpendiculaires à ces trois vecteurs, c'est-à-dire les plans des deux orbites instantanées et le plan invariable, sont parallèles à une même droite.

L'intersection des plans des deux orbites instantanées reste donc constamment parallèle au plan invariable.

C'est cette propriété qu'on a appelée assez improprement l'*élimination des nœuds;* sans doute parce que l'on n'a pas à envisager séparément la longitude du nœud de la première orbite et la longitude du nœud de la seconde, si l'on rapporte les longitudes au plan invariable.

Cette propriété ne subsisterait plus si l'on prenait des planètes fictives définies autrement que par le changement de variables que nous étudions; si, par exemple, on prenait, comme on le fait d'ordinaire, des planètes fictives dont les coordonnées et les vitesses par rapport à des axes fixes seraient les mêmes que les coordonnées et les vitesses des planètes réelles par rapport à des axes invariablement liés au Soleil.

26. **Premier exemple**. — Nous pouvons prendre, par exemple :

$$x'_1 = x_1 - x_7, \qquad x'_4 = x_4 - x_7, \qquad x'_7 = x_7$$

$$y'_1 = y_1, \qquad y'_4 = y_4, \qquad y'_7 = y_1 + y_4 + y_7.$$

On vérifie aisément :

1° Que la relation (6) est satisfaite;

2° Que y'_7 est égal à $y_1 + y_4 + y_7$;

3° Que x'_1 et x'_4 ne dépendent que des différences $x_1 - x_7$ et $x_4 - x_7$.

Ce changement de variables jouira donc des propriétés énoncées; il n'altérera pas la forme canonique des équations; il n'altérera pas la forme des intégrales des aires; les variables x'_7, x'_8, x'_9 ne figureront pas dans les équations et les variables y'_7, y'_8, y'_9 seront constamment nulles, de sorte que le nombre des degrés de liberté sera égal à 6.

Quant à nos deux planètes fictives, il est aisé d'en trouver la signification. La première aura pour coordonnées celles du point A *dans son mouvement relatif par rapport au point* C; mais elle

aura même quantité de mouvement que le point A *dans son mouvement absolu*. De même pour la seconde planète fictive.

27. Planètes fictives. — L'inconvénient de la solution précédente est aisé à apercevoir, bien qu'il ne faille pas s'en exagérer l'importance. Les quantités

$$y'_1, \quad y'_2, \quad y'_3$$

ne sont pas proportionnelles aux dérivées

$$\frac{dx'_1}{dt}, \quad \frac{dx'_2}{dt}, \quad \frac{dx'_3}{dt}.$$

Considérons la première planète fictive; à l'instant t nous lui attribuons certaines coordonnées x'_1, x'_2, x'_3 et une certaine quantité de mouvement y'_1, y'_2, y'_3; à l'instant $t+dt$ nous lui attribuons pour coordonnées $x'_1+dx'_1$, $x'_2+dx'_2$, $x'_3+dx'_3$. Mais la vitesse qu'elle devrait avoir pour passer dans le temps dt de la première position à la seconde n'est pas celle qu'on déduirait de la quantité de mouvement que nous lui avons attribuée.

On comprendra mieux la portée de cette objection au Chapitre IV quand je parlerai de la définition des orbites osculatrices. En tout cas, il est aisé de trouver une autre solution qui soit exempte de cet inconvénient.

Pour cela, il faut que l'on ait

$$x_i = m'_i \frac{dx_i}{dt},$$

les m_i étant des coefficients constants tels que

$$m'_1 = m'_2 = m'_3; \quad m'_4 = m'_5 = m'_6; \quad m'_7 = m'_8 = m'_9.$$

Nous conservons, d'ailleurs, toutes nos autres hypothèses.

Alors $m'_1 = m'_2 = m'_3$ représente la masse de la première planète fictive et $m'_4 = m'_5 = m'_6$ représente celle de la seconde planète fictive; et y'_1, y'_2, y'_3, par exemple (ou y'_4, y'_5, y'_6), représentent bien comme il convient les trois composantes de leur quantité de mouvement.

Nous pourrons également regarder

$$m'_7 = m'_8 = m'_9;$$

$$x'_7, \quad x'_8, \quad x'_9;$$

$$y'_7, \quad y'_8, \quad y'_9$$

comme la masse, les coordonnées et les composantes de la quantité de mouvement d'un troisième corps fictif.

Comme nous avons conservé toutes nos autres hypothèses et en particulier celle qui est exprimée par l'identité (6), nous aurons

$$\sum_3 m'_1 x'_1 \frac{dx'_1}{dt} = \sum_3 m_1 x_1 \frac{dx_1}{dt}.$$

Mais nous avons entre $\frac{dx'_1}{dt}$, $\frac{dx'_4}{dt}$, $\frac{dx'_7}{dt}$ et $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dx_4}{dt}$, $\frac{dx_7}{dt}$ les mêmes relations linéaires qu'entre x'_1, x'_4, x'_7 et x_1, x_4, x_7. Je puis donc, dans l'identité précédente, remplacer les dérivées $\frac{dx'_i}{dt}$ par les quantités x'_i elles-mêmes; j'obtiens ainsi

$$\sum_3 m'_1 (x'_1)^2 = \sum_3 m_1 (x_1)^2. \tag{9}$$

D'autre part, comme par hypothèse j'ai entre x'_2, x'_5, x'_8 et x_2, x_5, x_8 les mêmes relations linéaires qu'entre x'_1, x'_4, x'_7 et x_1, x_4, x_7, je puis écrire également

$$\sum_3 m'_1 x'_1 x'_2 = \sum_3 m_1 x_1 x_2 \tag{9 bis}$$

et de même

$$(9\ ter)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \sum_3 m'_1 (x'_2)^2 = \sum_3 m_1 (x_2)^2; & \sum_3 m'_1 (x'_3)^2 = \sum_3 m_1 (x_3)^2; \\ \sum_3 m'_1 x'_1 x'_3 = \sum_3 m_1 x_1 x_3; & \sum_3 m'_1 x'_2 x'_3 = \sum_3 m_1 x_2 x_3. \end{array} \right.$$

D'autre part, comme nous avons entre x'_1, x'_4, x'_7 et x_1, x_4, x_7 les mêmes relations linéaires qu'entre leurs dérivées, nous aurons

$$\sum_3 m'_1 \left(\frac{dx'_1}{dt}\right)^2 = \sum_3 m_1 \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2$$

et de même

$$\sum_3 m'_2 \left(\frac{dx'_2}{dt}\right)^2 = \sum_3 m_2 \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2;$$

$$\sum_3 m'_3 \left(\frac{dx'_3}{dt}\right)^2 = \sum_3 m_3 \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2;$$

en ajoutant ces trois égalités on trouve

$$\sum m'_i \left(\frac{dx'_i}{dt}\right)^2 = \sum m_i \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2,$$

où cette fois il faut donner à l'indice i toutes les valeurs possibles.

Cette équation exprime que *la force vive des trois corps fictifs est égale à la force vive des trois corps réels*. On a donc

$$T = \frac{1}{2}\sum m'\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum \frac{y'^2}{m'}.$$

Ainsi l'expression de l'énergie cinétique T en fonction des m' et des dérivées des x', ou encore en fonction des m' et des y', est la même qu'en fonction des m et des dérivées des x, ou encore qu'en fonction des m et des y.

28. Ces relations (9), (9 *bis*) et (9 *ter*) sont susceptibles d'une interprétation géométrique très simple.

Soit Z un axe quelconque passant par l'origine, P et P′ deux plans rectangulaires passant par l'axe Z; soient α, β, γ les cosinus directeurs du plan P; soient α', β', γ' ceux du plan P′.

La distance du point A (premier corps réel) au plan P sera

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3;$$

sa distance au plan P′ sera

$$\alpha' x_1 + \beta' x_2 + \gamma' x_3;$$

le carré de sa distance à l'axe Z sera

$$(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3)^2 + (\alpha' x_1 + \beta' x_2 + \gamma' x_3)^2,$$

et le moment d'inertie du système des trois corps réels par rapport à l'axe Z sera

$$J = \sum_3 m_1\left[(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3)^2 + (\alpha' x_1 + \beta' x_2 + \gamma' x_3)^2\right].$$

De même le moment d'inertie du système des trois corps fictifs par rapport à l'axe Z sera

$$J' = \sum_3 m'_1\left[(\alpha x'_1 + \beta x'_2 + \gamma x'_3) + (\alpha' x'_1 + \beta' x'_2 + \gamma' x'_3)^2\right].$$

En développant les carrés entre parenthèses, on verrait que J est un polynome du second degré en α, β, γ; α', β', γ'; et qu'il en est de même de J′.

Le coefficient de α^2, égal à celui de α'^2, est égal à

$$\sum_3 m_1 x_1^2$$

dans J et à

$$\sum_3 m'_1 x'^2_1$$

dans J'; le coefficient de $2\alpha\beta$, égal à celui de $2\alpha'\beta'$, est égal à

$$\sum_3 m_1 x_1 x_2$$

dans J et à

$$\sum_3 m'_1 x'_1 x'_2$$

dans J'.

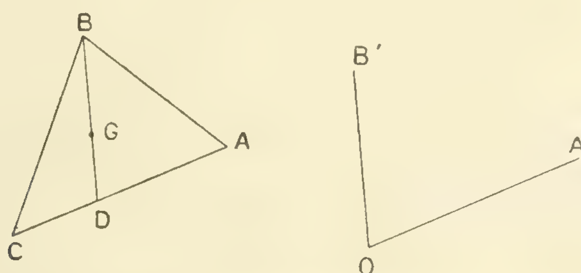
En résumé, chaque coefficient du polynome J est égal au second membre de l'une des égalités (9), (9 *bis*), (9 *ter*) et le coefficient correspondant du polynome J' est égal au premier membre de cette même égalité. Les deux polynomes J et J' sont donc identiques.

Donc, *le moment d'inertie des trois corps fictifs par rapport à un axe quelconque passant par l'origine est égal à celui des trois corps réels.*

29. Il s'agit donc de déterminer les relations linéaires qui lient x'_1, x'_4, x'_7 à x_1, x_4, x_7, de façon à satisfaire à la condition (9).

Le problème comporte évidemment une infinité de solutions: voici celle qui est la plus simple et la plus communément adoptée.

Fig. 1.



Prenons OA' égal et parallèle à CA. Nous avons deux masses m_1 et m_7 placées respectivement en A et en C; je représente en D le centre de gravité de ces deux masses. Je dis que nous pourrons remplacer ces deux masses par une masse $m'_7 = m_1 + m_7$ placée

au point D et par une masse m'_1 placée au point A′ et telle que

$$\frac{1}{m'_1} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_7}.$$

En effet, si je désigne par x'_1, x'_2, x'_3 les coordonnées du point A′, par x'_7, x'_8, x'_9 celles du point D, il est manifeste que x'_1, x'_2, x'_3, de même que x'_7, x'_8, x'_9, seront des fonctions linéaires des coordonnées des points A et C; et, d'autre part, que nous aurons entre x'_1, x_1 et x_7 la même relation linéaire qu'entre x'_2, x_2 et x_8 ou qu'entre x'_3, x_3 et x_9 et que nous aurons entre x'_7, x_1 et x_7 la même relation linéaire qu'entre x'_8, x_2 et x_8 ou qu'entre x'_9, x_3 et x_9.

Nous avons, en effet,

$$x'_1 = x_1 - x_7, \qquad x'_2 = x_2 - x_8, \qquad x'_3 = x_3 - x_9,$$

$$m'_7 x'_7 = m_1 x_1 + m_7 x_7, \qquad m'_7 x'_8 = m_1 x_2 + m_7 x_8, \qquad m'_7 x'_9 = m_1 x_3 + m_7 x_9.$$

Il reste à montrer que nous avons bien la relation (9), ou que

$$(10) \qquad m'_1 x'^2_1 + m'_7 x'^2_7 = m_1 x_1^2 + m_7 x_7^2,$$

ce qui revient au même, car, comme nous n'avons pas touché au corps B, nous avons

$$m'_4 = m_4, \qquad x'_4 = x_4, \qquad x'_5 = x_5, \qquad x'_6 = x_6.$$

Or la relation (10) peut s'écrire

$$m'_1 (x_1 - x_7)^2 + \frac{(m_1 x_1 + m_7 x_7)^2}{m'_7} = m_1 x_1^2 + m_7 x_7^2.$$

En identifiant les deux membres, je trouve

$$m'_1 + \frac{m_1^2}{m'_7} = m_1; \qquad -m'_1 + \frac{m_1 m_7}{m'_7} = 0; \qquad m'_1 + \frac{m_7^2}{m'_7} = m_7.$$

Ces trois relations me donnent respectivement

$$m'_1 = m_1 - \frac{m_1^2}{m'_7} = \frac{m_1(m'_7 - m_1)}{m'_7} = \frac{m_1 m_7}{m'_7},$$

$$m'_1 = \frac{m_1 m_7}{m'_7},$$

$$m'_1 = m_7 - \frac{m_7^2}{m'_7} = \frac{m_7(m'_7 - m_7)}{m'_7} = \frac{m_1 m_7}{m'_7}.$$

Elles me conduisent donc à la même valeur de m'_1 et l'on a d'ailleurs

$$\frac{1}{m'_1} = \frac{m'_7}{m_1 m_7} + \frac{m_1 + m_7}{m_1 m_7} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_7}.$$

La relation (10) est donc établie.

30. Nous venons de voir que nous pouvons remplacer deux masses m_1 et m_7 situées en A et en C, par deux masses

$$m_1 + m_7, \qquad m'_1 = \frac{m_1 m_7}{m_1 + m_7}$$

situées en D, centre de gravité de A et de C, et en A′.

Nous aurons donc remplacé nos trois masses réelles

$$m_1, \quad m_4, \quad m_7$$

situées en

$$A, \quad B, \quad C$$

par trois masses fictives

$$m'_1, \quad m_4, \quad m_1 + m_7$$

situées en

$$A', \quad B, \quad D.$$

Appliquons une seconde fois la même transformation et opérons sur les deux masses B et D comme nous avions opéré sur les deux masses A et C.

Menons donc OB′ égal et parallèle à DB et plaçons au point B′ une masse fictive m'_4 telle que

$$\frac{1}{m'_4} = \frac{1}{m_4} + \frac{1}{m_1 + m_7} = \frac{m_1 + m_4 + m_7}{m_4(m_1 + m_7)}.$$

Considérons, d'autre part, le centre de gravité G des deux masses B et D; ce sera également le centre de gravité des trois masses réelles A, B, C, et plaçons en G une masse fictive

$$m'_7 = m_4 + (m_1 + m_7) = m_1 + m_4 + m_7.$$

Nous aurons ainsi remplacé les deux masses B et D par deux masses nouvelles B′ et G.

En résumé, nous avons successivement remplacé les trois masses réelles

$$m_1, \quad m_4, \quad m_7 \quad \text{en} \quad A, \quad B, \quad C,$$

par les trois masses fictives

$$m'_1, \quad m_4, \quad m_1 + m_7 \qquad \text{en} \qquad A', \quad B, \quad D,$$

puis par les trois masses fictives

$$m'_1, \quad m'_4, \quad m'_7 \qquad \text{en} \qquad A', \quad B', \quad G.$$

Nous avons ainsi défini un changement de variables qui jouit de toutes les propriétés énoncées dans les numéros précédents.

Comme le centre de gravité est supposé fixe, le troisième corps fictif qui est en G doit être regardé comme fixe.

On n'a donc à s'inquiéter que du mouvement des deux planètes fictives A' et B', de sorte que le nombre des degrés de liberté est réduit à 6.

Les équations du mouvement conservent la forme canonique; les intégrales des aires conservent également leur forme.

L'expression de l'énergie cinétique T en fonction des masses et des vitesses fictives est la même qu'en fonction des masses et des vitesses réelles.

Au contraire, dans l'expression de l'énergie potentielle U, il faut conserver les masses réelles et leurs distances réelles. Mais nous devons observer que U ne dépend que des différences $x_1 - x_7$, $x_4 - x_7$, etc.; donc U ne dépend que des coordonnées x'_1, ..., des deux premiers corps fictifs A' et B', et ne dépend pas des coordonnées du troisième corps fictif G (que nous supposerons d'ailleurs nulles).

31. On peut exprimer le résultat auquel nous venons de parvenir en disant que la première planète A est rapportée à des axes mobiles passant par le corps central C, ou plus simplement au corps C, et que la seconde planète B est rapportée au point D, centre de gravité de A et de C.

Ce résultat peut évidemment se généraliser; soit un corps central C et n planètes P_1, P_2, ..., P_n; on rapportera P_1 à C; P_2 au centre de gravité de P_1 et de C; P_3 au centre de gravité de P_1, de P_2 et de C; et ainsi de suite. Le procédé s'applique donc à un nombre quelconque de corps.

Il est clair qu'au lieu de rapporter A à C et B au centre de gravité de A et de C, nous aurions pu au contraire rapporter B à C et A au centre de gravité de B et de C.

Dans ce qui va suivre, sauf avis contraire, nous supposerons toujours qu'on a adopté le changement de variables du n° 30 et non celui du n° 26. Nous poserons souvent

$$U_1 = -\frac{m_1 m_7}{AC}, \qquad U_2 = -\frac{m_4(m_1+m_7)}{BD},$$

$$U_3 = m_1 m_4\left(\frac{1}{BD} - \frac{1}{AB}\right) + m_7 m_4\left(\frac{1}{BD} - \frac{1}{BC}\right),$$

d'où

$$U = U_1 + U_2 + U_3.$$

32. Cas où l'une des masses est nulle. — Il y a des cas où l'une des masses est assez petite pour que les effets en puissent être entièrement négligés. C'est ce qui arrive, par exemple, quand on étudie les perturbations d'une petite planète par Jupiter. Le mouvement de la petite planète est troublé par Jupiter, mais celui de Jupiter n'est pas troublé par la petite planète.

C'est ce qui arrive encore dans la théorie de la Lune. La masse de la Lune est assez petite pour qu'on puisse admettre que le mouvement relatif du Soleil par rapport au centre de gravité Terre-Lune n'est pas altéré par l'attraction de la Lune.

Supposons donc que la masse m_4, par exemple, puisse être regardée comme un infiniment petit du premier ordre. Nous aurons alors, à des infiniment petits près du deuxième ordre,

$$m'_4 = \frac{m_4(m_1+m_7)}{m_1+m_4+m_7} = m_4.$$

Donc m'_4 sera un infiniment petit du premier ordre et il en sera de même de y'_4, y'_5, y'_6 et par conséquent de $\frac{y'^2_4}{m'_4}$, $\frac{y'^2_5}{m'_5}$, $\frac{y'^2_6}{m'_6}$. Nous pourrons poser

$$T = T_1 + T_2,$$

$$T_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{y'^2_1}{m'_1} + \frac{y'^2_2}{m'_2} + \frac{y'^2_3}{m'_3}\right), \qquad T_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{y'^2_4}{m'_4} + \frac{y'^2_5}{m'_5} + \frac{y'^2_6}{m'_6}\right),$$

de sorte que T_1 et T_2 représentent respectivement l'énergie cinétique de la première et de la seconde planète fictive et de même

$$U = U_1 + U_2 + U_3,$$

$$U_1 = -\frac{m_1 m_7}{AC}, \qquad U_2 + U_3 = -\frac{m_1 m_4}{AB} - \frac{m_7 m_4}{BC}.$$

Nous voyons que T_1 et T_2 sont finis, tandis que U_1 et $U_2 + U_3$ sont du premier ordre; nous serons donc amenés à poser

$$F = \Phi_0 + m_4 \Phi_1; \qquad \Phi_0 = T_1 + U_1; \qquad m_4 \Phi_1 = T_2 + U_2 + U_3.$$

Nos équations canoniques peuvent s'écrire

$$(11) \qquad \frac{dx'_i}{dt} = \frac{d\Phi_0}{dy'_i} + m_4 \frac{d\Phi_1}{dy'_i}; \qquad \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{d\Phi_0}{dx'_i} - m_4 \frac{d\Phi_1}{dx'_i}.$$

Pour la première planète fictive, c'est-à-dire pour $i = 1, 2$, ou 3, nous voyons que $\frac{d\Phi_1}{dy'_i}$ est nul, puisque T_2 ne dépend que de y'_4, y'_5, y'_6; et que $m_4 \frac{d\Phi_1}{dx'_i}$ est très petit, tandis que $\frac{d\Phi_0}{dx'_i}$ et $\frac{dy'_i}{dt}$ sont finis; nous pouvons donc négliger les termes en Φ_1 et nos équations s'écrivent

$$(12) \qquad \frac{dx'_i}{dt} = \frac{d\Phi_0}{dy'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{d\Phi_0}{dx'_i}.$$

Comme Φ_0 ne dépend que de x'_1, x'_2, x'_3, y'_1, y'_2, y'_3, nous avons un système complet d'équations canoniques (12) à trois degrés de liberté; ce système définit le mouvement de la première planète fictive ou, ce qui revient au même, le mouvement relatif de la planète A par rapport au Soleil C. Ce mouvement est donc le même que si la masse m_4 n'existait pas; c'est donc un mouvement elliptique képlérien.

Étudions maintenant le mouvement de la seconde planète fictive, c'est-à-dire le mouvement relatif de la planète B par rapport au centre de gravité du système des deux corps A et C. Pour cela, reprenons les équations (11) et donnons à l'indice i les valeurs 4, 5, 6. Comme Φ_0 ne dépend pas de x'_4, x'_5, x'_6, y'_4, y'_5, y'_6, ces équations se réduiront à

$$(13) \qquad \frac{dx'_i}{dt} = m_4 \frac{d\Phi_1}{dy'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{dt} = -m_4 \frac{d\Phi_1}{dx'_i}.$$

Comme le mouvement de la première planète fictive peut être regardé comme connu, les quantités x'_1, x'_2, x'_3, y'_1, y'_2, y'_3 seront des fonctions connues du temps. Nous pourrons donc les remplacer dans Φ_1 et dans ses dérivées par leurs valeurs en fonction du temps.

Nous aurons donc, pour définir le mouvement de la seconde planète fictive, un système (13) d'équations canoniques à trois degrés de liberté. Mais la fonction caractéristique Φ_1 dépendra non seulement des inconnues $x'_4, x'_5, x'_6; y'_4, y'_5, y'_6$, mais encore du temps. Nous serons donc dans le cas du n° 12.

Nous pouvons écrire les équations (13) de manière à mieux mettre en évidence l'ordre de grandeur des différents termes. Posons, en effet,

$$y'_4 = m'_4 y''_4, \qquad y'_5 = m'_5 y''_5, \qquad y'_6 = m'_6 y''_6,$$

ou, ce qui revient au même, puisque $m'_4 = m'_5 = m'_6$ et que l'on peut supposer $m'_4 = m_4$ à des infiniment petits près du deuxième ordre ainsi que nous l'avons montré plus haut,

$$y'_i = m_4 y''_i \qquad (i = 4, 5, 6).$$

Les y'' seront finis, puisque les y' sont du premier ordre; et il viendra

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}(y''^2_4 + y''^2_5 + y''^2_6) - \frac{m_1}{AB} - \frac{m_7}{CB},$$

et nos équations (13) s'écriront

$$(14) \qquad \frac{dx'_i}{dt} = \frac{d\Phi_1}{dy''_i}, \qquad \frac{dy''_i}{dt} = -\frac{d\Phi_1}{dx'_i}.$$

Ici les inconnues x' et y'' sont finies et tous les termes de Φ_1 se présentent sous forme finie; la masse m_4 ne figure plus nulle part dans les équations.

33. Dans ce qui précède, nous avons rapporté la petite planète B au centre de gravité de A et de C, et la grosse planète A au soleil C. Nous aurions tout aussi bien pu faire le contraire et rapporter la petite planète au Soleil, et la grosse planète au centre de gravité du Soleil et de la petite planète. Nous n'avons pour cela, tout en conservant nos relations, qu'à supposer que c'est la masse m_1 du corps A qui est infiniment petite.

La petite planète A est alors rapportée au Soleil C et la grosse planète B au centre de gravité D de A et de C; mais, comme la masse de A est nulle, ce centre de gravité D coïncide avec C, de sorte que la grosse planète est également rapportée au Soleil.

On aura alors, aux infiniment petits près du premier ordre,

$$m'_4 = \frac{m_4(m_1 + m_7)}{m_1 + m_4 + m_7} = \frac{m_4 m_7}{m_4 + m_7},$$

et aux infiniment petits près du second ordre,

$$m'_1 = \frac{m_1 m_7}{m_1 + m_7} = m_1.$$

Nous conserverons à T_1 et à T_2, à U_1, U_2 et U_3 la même signification que dans le numéro précédent.

Ici, T_2 et U_2 sont finis, T_1 et $U_1 + U_3$ sont du premier ordre; nous poserons donc

$$F = \Phi_0 + m_1 \Phi_1, \qquad \Phi_0 = T_2 + U_2, \qquad m_1 \Phi_1 = T_1 + U_1 + U_3,$$

et nous retrouverons les équations (11), à cette différence près que m_4 y sera remplacé par m_1.

Si nous étudions d'abord le mouvement de la grosse planète, nous pourrons négliger Φ_1 et nous retrouverons le système d'équations canoniques (12), ce qui montre que le mouvement de cette planète est képlérien.

Si nous voulons étudier le mouvement de la petite planète, il nous faut, dans les équations (11), donner à l'indice i les valeurs 1, 2, 3; les dérivées correspondantes de Φ_0 étant nulles, nous retrouverons les équations canoniques

$$\frac{dx'_i}{dt} = m_1 \frac{d\Phi_1}{dy'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{dt} = -m_1 \frac{d\Phi_1}{dx'_i}. \tag{13 bis}$$

Posons alors, comme au numéro précédent,

$$y'_i = m'_i y''_i = m_1 y''_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

il viendra

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}(y''^2_1 + y''^2_2 + y''^2_3) - \frac{U_1 + U_3}{m_1};$$

et nous retomberons sur les équations (14).

34. Nous avons vu au n° 12 que, quand la fonction F dépend explicitement du temps, l'intégrale des forces vives cesse d'exister. Dans les équations (14) des n°s 32 et 33, la fonction caractéris-

tique Φ_1 dépend non seulement des inconnues x' et y', mais encore du temps; l'intégrale des forces vives $\Phi_1 = \text{const.}$ n'a donc pas lieu.

Il en est de même des intégrales des aires. Que deviennent donc l'intégrale des forces vives et celle des aires, qui sont vraies dans le cas général, lorsque l'on fait tendre l'une des masses vers zéro ? Elles ne cessent pas d'avoir lieu, mais, à la limite, ce sont des relations entre les coordonnées et les composantes de la vitesse de la grosse planète, où les coordonnées et la vitesse de la petite planète ne figurent pas. Elles deviennent donc illusoires, en ce qui concerne l'étude du mouvement de cette petite planète.

En revanche, ainsi que nous l'avons vu au n° 12, nous pouvons faire subir aux équations (14) des changements *canoniques* de variables sans en altérer la forme canonique.

35. **Problème restreint.** — Dans la suite, nous serons fréquemment conduits à étudier de plus près un cas particulier simple. Je suppose que, l'une des masses étant nulle, le mouvement relatif de la grosse planète par rapport au Soleil soit un mouvement képlérien; je suppose, de plus, que, l'excentricité de cette ellipse képlérienne étant nulle, l'orbite de cette grosse planète soit circulaire. Alors la grosse planète et le Soleil décriront des circonférences concentriques autour de leur centre de gravité commun et ces deux circonférences seront dans un même plan.

Je suppose enfin que, la position et la vitesse initiale de la petite planète étant également dans ce même plan, cette petite planète reste constamment dans ce plan.

C'est là ce que l'on appelle le *problème restreint.* On peut le traiter soit par le procédé du n° 32, soit par celui du n° 33. Dans les deux cas, la grosse planète sera rapportée au Soleil, mais la petite planète pourra être rapportée, soit au Soleil, soit au centre de gravité de la grosse planète et du Soleil.

Nous avons vu au n° 34 que, pour une petite planète, les intégrales des forces vives et des aires deviennent généralement illusoires. Mais, dans le cas particulier du problème restreint, il y a une combinaison de ces intégrales qui subsiste et nous fournit une intégrale du système (14) connue sous le nom d'*intégrale de Jacobi;* c'est ce que nous verrons plus loin.

36. Fonction perturbatrice. — Nous avons

$$U_1 + U_2 = -\frac{m_1 m_7}{AC} - \frac{m_4(m_1 + m_7)}{BD},$$

$$U_3 = \frac{m_4(m_1 + m_7)}{BD} - \frac{m_4 m_7}{BC} - \frac{m_1 m_4}{AB}.$$

Nous supposerons généralement que le corps C est le Soleil et que les corps A et B sont des planètes. Il en résulte que les masses m_1 et m_4 sont très petites par rapport à m_7 et peuvent être regardées comme du premier ordre.

Il en résulte que le point D est très voisin du point C puisqu'il partage la distance AC en segments proportionnels à m_1 et m_7. La distance CD peut donc être regardée comme du premier ordre et il en est de même des différences

$$BC - BD, \qquad \frac{1}{BD} - \frac{1}{BC}.$$

Dans ces conditions, $U_1 + U_2$ est de premier ordre puisque tous ses termes contiennent en facteurs m_1 ou m_4; et

$$U_3 = m_1 m_4 \left(\frac{1}{BD} - \frac{1}{AB}\right) + m_4 m_7 \left(\frac{1}{BD} - \frac{1}{BC}\right)$$

est du second ordre, puisque tous ses termes contiennent en facteurs soit $m_1 m_4$, soit

$$m_4 \left(\frac{1}{BD} - \frac{1}{BC}\right).$$

D'autre part, m'_1 et m'_4 sont du premier ordre et il en est de même des $y'_i = m'_i \frac{dx'_i}{dt}$ puisque, pour $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, la masse m'_i est infiniment petite et que, d'ailleurs, y'_7, y'_8, y'_9 sont nuls.

Il en est donc encore de même de

$$\frac{y'^2_i}{m'_i}$$

et de

$$T = T_1 + T_2,$$

où je conserve aux notations T_1 et T_2 le même sens qu'au n° 32.

Nous pouvons alors poser

$$F = F_0 + \mu F_1$$

avec

$$F_0 = T + U_1 + U_2, \qquad \mu F_1 = U_3.$$

Alors F_0 est du premier ordre, μF_1 du second ordre, et, si μ désigne un coefficient numérique très petit de l'ordre de m_1 et de m_3, F_1 est du même ordre que F_0. Grâce à l'introduction de ce coefficient μ, la grandeur relative des deux termes F_0 et μF_1 se trouve mise en évidence.

Le second terme μF_1 a reçu le nom de *fonction perturbatrice*.

37. Étudions d'abord le terme F_0, nous avons

$$(15) \qquad F_0 = \left(T_1 - \frac{m_1 m_7}{AC}\right) + \left[T_2 - \frac{m_3(m_1 + m_7)}{BD}\right].$$

La première parenthèse ne dépend que de $x'_1, x'_2, x'_3, y'_1, y'_2, y'_3$; la seconde ne dépend que de $x'_4, x'_5, x'_6, y'_4, y'_5, y'_6$. Si, en première approximation, nous négligions le terme très petit μF_1 et que F se réduisît à F_0, nous aurions

$$F = F'_0 + F''_0.$$

F'_0 et F''_0 désignant la première et la seconde parenthèse du second membre de (15), de sorte que

$$F'_0 = T_1 + U_1, \qquad F''_0 = T_2 + U_2,$$

$$\frac{dF'_0}{dx'_i} = \frac{dF'_0}{dy'_i} = 0 \qquad (i = 4, 5, 6),$$

$$\frac{dF''_0}{dx'_i} = \frac{dF''_0}{dy'_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

et nos équations canoniques deviendraient

$$(16) \qquad \frac{dx'_i}{dt} = \frac{dF'_0}{dy'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{dF'_0}{dx'_i} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

$$(16\ bis) \qquad \frac{dx'_i}{dt} = \frac{dF''_0}{dy'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{dF''_0}{dy'_i} \qquad (i = 4, 5, 6).$$

On pourrait alors considérer séparément le mouvement de la première planète fictive et celui de la seconde; car, dans les équations (16) figurent seulement les coordonnées et la vitesse de la première planète et dans les équations (16 *bis*) seulement celles de la seconde planète.

Si nous examinons d'abord les équations (16), nous voyons que

$$F'_0 = \frac{1}{2m'_1}(y'^2_1 + y'^2_2 + y'^2_3) - \frac{m_1 m_7}{AC}.$$

Le mouvement de la première planète fictive sera donc le même que celui d'une masse mobile m'_1 attirée par une masse fixe

$$\frac{m_1 m_7}{m'_1} = m_1 + m_7.$$

Ce sera donc un mouvement elliptique conforme aux lois de Képler.

Si nous passons aux équations (16 *bis*), nous avons

$$F''_0 = \frac{1}{2m'_4}(y'^2_4 + y'^2_5 + y'^2_6) - \frac{m_4(m_1 + m_7)}{BD}.$$

Le mouvement de la seconde planète fictive est donc le même que celui d'une masse mobile

$$m'_4 = \frac{m_4(m_1 + m_7)}{m_1 + m_4 + m_7}$$

attirée par une masse fixe

$$\frac{m_4(m_1 + m_7)}{m'_4} = m_1 + m_4 + m_7.$$

C'est donc encore un mouvement képlérien.

Comme les termes négligés μF_1 sont très petits par rapport aux termes conservés F_0, l'erreur commise n'est pas grande. Les orbites différeront donc peu des ellipses képlériennes; et les *perturbations* subies par ces orbites elliptiques seront très petites.

38. Étudions maintenant la fonction perturbatrice μF_1. Je puis écrire

$$\mu F_1 = \left(\frac{1}{BD} - \frac{1}{A'B'}\right) + m_1 m_4\left(\frac{1}{A'B'} - \frac{1}{AB}\right) + m_4 m_7\left(\frac{1}{BD} - \frac{1}{BC}\right).$$

Le premier terme du second membre a reçu le nom de *partie principale de la fonction perturbatrice;* l'ensemble des deux derniers termes s'appelle *la partie complémentaire de la fonction perturbatrice.*

La partie principale peut s'écrire

$$m_1 m_4 \left[\frac{1}{\sqrt{x_4'^2 + x_5'^2 + x_6'^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x_4' - x_1')^2 + (x_5' - x_2')^2 + (x_6' - x_3')^2}} \right],$$

et il est intéressant de voir comment on pourra passer de l'expression de cette partie principale à celle de la fonction perturbatrice complète μF_1.

Supposons d'abord que

$$AC = \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}$$

soit plus petit que

$$BD = \sqrt{x_4'^2 + x_5'^2 + x_6'^2}.$$

Dans ce cas, l'expression

$$\frac{1}{A'B'} = [(x_4' - x_1')^2 + (x_5' - x_2')^2 + (x_6' - x_3')^2]^{-\frac{1}{2}}$$

peut se développer suivant les puissances croissantes de x_1', x_2', x_3'.

Nous avons, en effet,

$$(A'B')^2 = (BD)^2 + (AC)^2 - 2 AC.BD \cos\gamma,$$

et, par conséquent,

$$(17) \qquad \frac{1}{A'B'} = [BD - AC e^{i\gamma}]^{-\frac{1}{2}} [BD - AC e^{-i\gamma}]^{-\frac{1}{2}},$$

où γ est l'angle de la direction BD ou OB' avec la direction AC ou OA'.

Chacun des deux facteurs du second membre de (17) est développable suivant les puissances de $\frac{AC}{BD}$ toutes les fois que cette quantité est plus petite que 1. Il en est donc de même du premier membre et je puis écrire

$$\frac{1}{A'B'} = \sum P_n \frac{AC^n}{BD^{n+1}},$$

où P_n est une fonction de l'angle γ.

Il serait d'ailleurs aisé de voir que le terme général de cette série $P_n \frac{AC^n}{BD^{n+1}}$ peut être mis sous la forme du quotient de deux polynomes entiers en x_1', x_2', x_3', x_4', x_5', x_6'.

Je me bornerai à renvoyer, pour plus de détails, aux nos 22, 23, 24 de mon Ouvrage sur le *Potentiel newtonien* (Paris, Naud, 1899) et à la page 50 de mon Ouvrage sur les *Figures d'équilibre d'une masse fluide* (Paris, Naud, 1903).

Je reviendrai d'ailleurs sur cette question dans un Chapitre ultérieur quand je traiterai en détail du développement de la fonction perturbatrice.

Cela posé, le premier terme de notre série, qui correspond à $n = 0$, ne sera pas autre chose que $\frac{1}{\mathrm{BD}}$, de sorte que la partie principale de la fonction perturbatrice aura pour valeur

$$-m_1 m_4 \sum \mathrm{P}_n \frac{\mathrm{AC}^n}{\mathrm{BD}^{n+1}}, \tag{18}$$

où n peut prendre toutes les valeurs entières *positives*: 1, 2, ...

Maintenant, la fonction perturbatrice complète pourra s'écrire

$$\mu \mathrm{F}_1 = m_1 m_4 \left(\frac{1}{\mathrm{BD}} - \frac{1}{\mathrm{BA}} \right) + m_4 m_7 \left(\frac{1}{\mathrm{BD}} - \frac{1}{\mathrm{BC}} \right),$$

et nous aurons

$$\mathrm{BA}^2 = (x'_4 - \alpha x'_1)^2 + (x'_5 - \alpha x'_2)^2 + (x'_6 - \alpha x'_3)^2,$$
$$\mathrm{BC}^2 = (x'_4 - \beta x'_1)^2 + (x'_5 - \beta x'_2)^2 + (x'_6 - \beta x'_3)^2,$$

où

$$\alpha = \frac{m_7}{m_1 + m_7}, \qquad \beta = \frac{-m_1}{m_1 + m_7};$$

car on voit immédiatement que les projections du vecteur DA sur les trois axes sont $\alpha x'_1$, $\alpha x'_2$, $\alpha x'_3$, et que celles du vecteur DC sont $\beta x'_1$, $\beta x'_2$, $\beta x'_3$.

On voit que les expressions de BA et de BC ne diffèrent de celles de A'B' que par la substitution de $\alpha x'_1$, ..., ou de $\beta x'_1$, ..., à x'_1, ...

Nous aurons donc

$$\frac{1}{\mathrm{BA}} = \sum \alpha^n \mathrm{P}_n \frac{\mathrm{AC}^n}{\mathrm{BD}^{n+1}}, \qquad \frac{1}{\mathrm{BC}} = \sum \beta^n \mathrm{P}_n \frac{\mathrm{AC}^n}{\mathrm{BD}^{n+1}},$$

où n prend les valeurs 0, 1, 2, ...

Nous pourrons donc écrire

$$\mu \mathrm{F}_1 = m_4 (m_1 + m_7) \frac{1}{\mathrm{BD}} - m_4 \sum (m_1 \alpha^n + m_7 \beta^n) \mathrm{P}_n \frac{\mathrm{AC}^n}{\mathrm{BD}^{n+1}}.$$

Mais $\frac{1}{\mathrm{BD}}$ est égal au premier terme de la série $\mathrm{P}_0 \frac{\mathrm{AC}^0}{\mathrm{BD}}$ et, d'autre part,

$$m_1 \alpha^n + m_7 \beta^n = (m_1 + m_7)(\alpha \beta^n - \beta \alpha^n).$$

On a donc

$$\mu \mathrm{F}_1 = m_4 (m_1 + m_7) \left[\frac{1}{\mathrm{BD}} - \sum (\alpha \beta^n - \beta \alpha^n) \mathrm{P}_n \frac{\mathrm{AC}^n}{\mathrm{BD}^{n+1}} \right].$$

Mais, pour $n = 0$, on a

$$\alpha \beta^n - \beta \alpha^n = \alpha - \beta = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}_n \frac{\mathrm{AC}_n}{\mathrm{BD}^{n+1}} = \frac{1}{\mathrm{BD}},$$

le terme correspondant est donc détruit par le terme $\frac{1}{\mathrm{BD}}$.

Pour $n = 1$, on a $\alpha \beta^n - \beta \alpha^n = 0$ et le terme correspondant est nul.

Nous pouvons donc écrire

$$\mu \mathrm{F}_1 = - m_4 (m_1 + m_7) \sum (\alpha \beta^n - \beta \alpha^n) \mathrm{P}_n \frac{\mathrm{AC}^n}{\mathrm{BD}^{n+1}},$$

où n prend les valeurs 2, 3, ..., ou bien encore

$$\mu \mathrm{F}_1 = - m_4 \sum \frac{m_1 m_7^n \pm m_7 m_1^n}{(m_1 + m_7)} \mathrm{P}_n \frac{\mathrm{AC}^n}{\mathrm{BD}^{n+1}}$$

(on doit prendre le signe + si n est pair et le signe — si n est impair).

Ainsi donc, quand on a développé la partie principale de la fonction perturbatrice sous la forme (18) et que l'on veut obtenir sous la même forme le développement de la fonction perturbatrice complète, il suffit de multiplier chaque terme par un facteur constant convenable.

Ce facteur constant

$$\frac{m_7^n \pm m_7 m_1^{n-1}}{(m_1 + m_7)^n}$$

est égal à 1 *à des quantités près de l'ordre de* m_1 pour $n = 2$, 3, ...; et il est égal à 0 pour $n = 1$.

Donc, *à des quantités près de l'ordre* $m_1^2 m_4$, c'est-à-dire du troisième ordre, la fonction perturbatrice $\mu \mathrm{F}_1$ sera égale à sa partie principale, moins le premier terme du développement (18) de cette partie principale.

Cette partie principale sera égale à

$$-m_1 m_4 \sum P_n \frac{AC^n}{BD^{n+1}} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

et la partie complémentaire à

$$(19) \qquad m_1 m_4 P_1 \frac{AC}{BD^2},$$

aux quantités près du troisième ordre.

Il est d'ailleurs aisé de transformer cette expression (19), qui représente l'ensemble des termes du premier degré dans le développement de

$$\frac{m_1 m_4}{A'B'} = m_1 m_4 [(x'_4 - x'_1)^2 + (x'_5 - x'_2)^2 + (x'_6 - x'_3)^2]^{-\frac{1}{2}},$$

suivant les puissances de x'_1, x'_2, x'_3.

Nous trouvons, en effet, en négligeant les carrés de x'_1, x'_2, x'_3,

$$\frac{m_1 m_4}{A'B'} = m_1 m_4 [BD^2 - 2(x'_1 x'_4 + x'_2 x'_5 + x'_3 x'_6)]^{-\frac{1}{2}}$$

ou

$$\frac{m_1 m_4}{A'B'} = m_1 m_4 \left[\frac{1}{BD} + \frac{x'_1 x'_4 + x'_2 x'_5 + x'_3 x'_6}{BD^3}\right].$$

Il reste donc, pour l'expression approximative de la partie complémentaire,

$$\frac{m_1 m_4}{BD^3}(x'_1 x'_4 + x'_2 x'_5 + x'_3 x'_6).$$

39. On peut arriver au même résultat par une voie moins détournée. Soit

$$m_1 m_4 \left(\frac{1}{A'B'} - \frac{1}{AB}\right) + m_4 m_7 \left(\frac{1}{BD} - \frac{1}{BC}\right)$$

la partie complémentaire à étudier. Comme $\frac{1}{A'B'} - \frac{1}{AB}$ est de l'ordre de m_1, le premier terme est de l'ordre de $m_1^2 m_4$, c'est-à-dire du troisième ordre. Passons au second terme

$$m_4 m_7 \left(\frac{1}{BD} - \frac{1}{BC}\right).$$

On a trouvé

$$\frac{1}{BC} = [(x'_4 - \beta x'_1)^2 + (x'_5 - \beta x'_2)^2 + (x'_6 - \beta x'_3)^2]^{-\frac{1}{2}}.$$

Développons $\frac{1}{BC}$ suivant les puissances de β, ce qui est possible, puisque, β étant très petit, $\beta AC = DC$ sera toujours plus petit que BD; il viendra

$$\frac{1}{BC} = \frac{1}{BD} + \beta P_1 \frac{AC}{BD^2} + \beta^2 P_2 \frac{AC^2}{BD^3} + \ldots.$$

Le troisième terme du second membre (et, *a fortiori*, les termes suivants) pourra être négligé, car, multiplié par $m_4 m_7$, il deviendrait de l'ordre de $m_4 \beta^2$, c'est-à-dire de l'ordre de $m_4 m_1^2$, c'est-à-dire du troisième ordre. Il reste donc pour notre partie complémentaire, toujours avec la même approximation,

$$-m_4 m_7 \beta P_1 \frac{AC}{BD^2} = m_4 m_7 \frac{m_1}{m_1 + m_7} P_1 \frac{AC}{BD^2},$$

ou, en négligeant encore $m_4 m_1^2$,

$$m_4 m_1 P_1 \frac{AC}{BD^2} = \frac{m_1 m_4}{BD^3}(x'_1 x'_4 + x'_2 x'_5 + x'_3 x'_6).$$

C. Q. F. D.

Cette démonstration s'applique au cas où AC est plus grand que BD, tandis que, dans le numéro précédent, nous supposions AC plus petit que BD.

40. Examinons, en particulier, ce qui se passe dans les cas étudiés aux nos 32 et 33, et où l'une des masses est nulle. Supposons d'abord, comme au no 33, $m_1 = 0$. Alors, les deux planètes sont rapportées au Soleil, car les points D et C se confondent.

Nous avons alors

$$F = \Phi_0 + m_1 \Phi_1$$

et nous pouvons négliger les termes en m_1^2. Nous négligerons donc dans la fonction perturbatrice les termes en $m_4 m_1^2$; nous avons vu que, avec cette approximation, la partie complémentaire de la

fonction perturbatrice se réduit à

$$\frac{m_1 m_4}{\mathrm{BD}^3}(x'_1 x'_4 + x'_2 x'_5 + x'_3 x'_6).$$

Mais le point D, étant très près du point C, la distance BD peut se réduire à BC et A′B′ à AB à des quantités près de l'ordre de m_1.

Nous aurons donc, en négligeant m_1^2,

$$\mathrm{F} = (\mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2) - \frac{m_1 m_7}{\mathrm{AC}} - \frac{m_4(m_1 + m_7)}{\mathrm{BD}} + m_1 m_4 \left(\frac{1}{\mathrm{BD}} - \frac{1}{\mathrm{AB}}\right)$$
$$+ \frac{m_1 m_4}{\mathrm{BD}^3}(x'_1 x'_4 + x'_2 x'_5 + x'_3 x'_6).$$

Dans les deux derniers termes avec la même approximation BD peut être remplacé par BC; d'où, en négligeant m_1 dans l'expression de Φ_0 et m_1^2 dans celle de Φ_1,

$$\Phi_0 = \mathrm{T}_2 - \frac{m_4(m_1 + m_7)}{\mathrm{BC}},$$

$$\Phi_1 = \frac{\mathrm{T}_1}{m_1} - \frac{m_7}{\mathrm{AC}} + m_4\left(\frac{1}{\mathrm{BC}} - \frac{1}{\mathrm{AB}}\right) + \frac{m_4}{\mathrm{BC}^3}(x'_1 x'_4 + x'_2 x'_5 + x'_3 x'_6).$$

Rappelons que, avec les notations du n° 33,

$$\frac{\mathrm{T}_1}{m_1} = \frac{1}{2}(y''^2_1 + y''^2_2 + y''^2_3).$$

41. Si l'on suppose, au contraire, comme au n° 32, $m_4 = 0$, la grosse planète est rapportée au Soleil et la petite au centre de gravité de la grosse planète et du Soleil. On trouve alors

$$\Phi_1 = \frac{\mathrm{T}_2}{m_4} - \frac{m_1 + m_7}{\mathrm{BD}} + m_1\left(\frac{1}{\mathrm{BD}} - \frac{1}{\mathrm{A'B'}}\right)$$
$$+ m_1\left(\frac{1}{\mathrm{A'B'}} - \frac{1}{\mathrm{AB}}\right) + m_7\left(\frac{1}{\mathrm{BD}} - \frac{1}{\mathrm{BC}}\right).$$

Dans le second membre de cette expression, le troisième terme correspond à la partie principale de la fonction perturbatrice et les deux derniers termes à la partie complémentaire.

Il n'y a d'ailleurs aucune simplification particulière.

42. Cas de la Lune. — Le cas de la théorie de la Lune exige

un examen spécial. Nous supposerons que le corps A est la Lune, le corps B le Soleil, le corps C la Terre. Dans ces conditions, on voit que AC est beaucoup plus petit que BD.

Posons alors

$$U = U_1 + U_2 + U_3,$$

$$U_1 = -\frac{m_1 m_7}{AC}, \qquad U_2 = -\frac{m_4(m_1 + m_7)}{BD},$$

$$U_3 = m_1 m_4 \left(\frac{1}{BD} - \frac{1}{AB}\right) + m_4 m_7 \left(\frac{1}{BD} - \frac{1}{BC}\right).$$

Je conserve d'ailleurs à T_1 et à T_2 la même signification qu'au n° 32, de sorte que

$$F = T_1 + T_2 + U_1 + U_2 + U_3.$$

Comparons l'ordre de grandeur de ces différents termes; U_3 représente la fonction perturbatrice, et comme AC est beaucoup plus petit que BD, on a, d'après le n° 38,

$$U_3 = -m_4 \sum \frac{m_1 m_7^n \pm m_7 m_1^n}{(m_1 + m_7)^n} P_n \frac{AC^n}{BD^{n+1}}.$$

A cause de la petitesse de AC, le premier terme

$$-m_4 \frac{m_7 m_1^2 + m_1 m_7^2}{(m_1 + m_7)^2} P_2 \frac{AC^2}{BD^3}$$

est de beaucoup le plus grand; et comme m_1 est notablement plus petit que m_7, il est de l'ordre de

$$m_1 m_4 \frac{AC^2}{BD^3}.$$

Au contraire, U_2 est de l'ordre de $\frac{m_4 m_7}{BD}$ et U_1 de l'ordre de $\frac{m_1 m_7}{AC}$.

Restent T_1 et T_2; nous savons que, dans le mouvement képlérien, si l'excentricité est nulle, l'énergie cinétique est constante et égale à la moitié de la valeur absolue de l'énergie potentielle.

Or, l'orbite de la Terre par rapport au Soleil, ou celle de la Lune par rapport à la Terre, s'écartent peu d'une ellipse képlérienne très peu excentrique. Il en résulte que T_1 est à peu près égal à $\frac{-U_1}{2}$ et T_2 à $\frac{-U_2}{2}$.

Nous pouvons donc diviser la fonction F en trois parties à savoir :

1° $T_2 + U_2$ qui est de l'ordre de $\frac{m_4 m_7}{BD}$;

2° $T_1 + U_1$ qui est de l'ordre de $\frac{m_1 m_7}{AC}$;

3° U_3 qui est de l'ordre de $m_1 m_4 \frac{AC^2}{BD^3}$.

Nous avons à peu près

$$\frac{m_4}{m_7} = 350000, \qquad \frac{m_1}{m_7} = \frac{1}{80}, \qquad \frac{AC}{BD} = \frac{1}{400}.$$

Donc le rapport

$$\frac{U_3}{T_1 + U_1} \text{ est de l'ordre de } \frac{m_4}{m_7}\left(\frac{AC}{BD}\right)^3 \text{ ou du } \frac{1}{150},$$

et

$$\frac{U_3}{T_2 + U_2} \text{ est de l'ordre de } \frac{m_1}{m_7}\left(\frac{AC}{BD}\right)^2 \text{ ou du } \frac{1}{12000000}.$$

On voit que la troisième partie de la fonction perturbatrice est notablement plus petite que la deuxième et tout à fait négligeable devant la première.

Nous pouvons donc poser

$$F = \Phi_0 + m_1 \Phi_1,$$

avec

$$\Phi_0 = T_2 + U_2; \qquad m_1 \Phi_1 = T_1 + U_2 + U_3.$$

Pour le calcul de x'_4, x'_5, x'_6 nous avons les équations canoniques

$$\frac{dx'_i}{dt} = \frac{dF}{dy'_i} = \frac{d\Phi_0}{dy'_i} + m_1 \frac{d\Phi_1}{dy'_i},$$

$$\frac{dy'_i}{dt} = -\frac{dF}{dx'_i} = -\frac{d\Phi_0}{dx'_i} - m_1 \frac{d\Phi_1}{dx'_i}$$

$$(i = 4, 5, 6).$$

J'observe que Φ_1 ne dépend pas de y'_4, y'_5, y'_6 variables qui ne figurent que dans T_2; quant à x'_4, x'_5, x'_6, ces variables ne figurent ni dans T_1, ni dans U_1, mais seulement dans U_3; nos équations

deviennent donc

$$(20) \qquad \frac{dx'_i}{dt} = \frac{d\Phi_0}{dy'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{d\Phi_0}{dx'_i} - \frac{dU_3}{dx'_i},$$

et comme U_3 est négligeable devant Φ_0

$$\frac{dy'_i}{dt} = -\frac{d\Phi_0}{dx'_i}.$$

Le mouvement relatif du Soleil par rapport au centre de gravité du système Terre-Lune est donc le même que si la fonction F se réduisait à Φ_0, c'est-à-dire que si les masses de la Terre et de la Lune étaient concentrées en leur centre de gravité commun. *C'est donc un mouvement képlérien* (bien entendu, si l'on ne considère que les actions mutuelles du Soleil, de la Terre et de la Lune, et que l'on néglige les effets de l'attraction des planètes).

Pour le calcul de x'_1, x'_2, x'_3, nous nous servirons des équations canoniques, en y faisant $i = 1, 2, 3$; mais comme x'_1, x'_2, x'_3; y'_1, y'_2, y'_3 ne figurent pas dans Φ_0 ces équations se réduiront à

$$(13\ bis) \qquad \frac{dx'_i}{dt} = m_1\frac{d\Phi_1}{dy'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{dt} = -m_1\frac{d\Phi_1}{dx'_i}.$$

La fonction Φ_1 dépend, comme aux n°s 33 et 40, non seulement des inconnues x'_1, x'_2, x'_3; y'_1, y'_2, y'_3, mais encore du temps t; car elle dépend de x'_4, x'_5, x'_6 qui peuvent être regardées comme des fonctions connues du temps, définies par les équations (20).

La fonction $m_1\Phi_1$ se compose elle-même de deux parties $T_1 + U_1$ et U_3; la seconde est, nous l'avons vu, beaucoup plus petite que la première et pourra jouer le rôle de fonction perturbatrice. Mais la petitesse de cette fonction perturbatrice n'est pas due ici aux mêmes circonstances que dans le cas des perturbations des planètes.

La masse perturbatrice m_4 est celle du Soleil qui, loin d'être très petite, est au contraire très grande. Mais le rapport que l'on doit envisager est

$$\frac{m_4}{m_7}\left(\frac{AC}{BC}\right)^3,$$

qui est très petit, parce que $\frac{AC}{BD}$ est petit.

La petitesse de $\frac{AC}{BD}$ entraîne encore une autre conséquence, c'est qu'on aura avantage à développer la fonction perturbatrice sous la forme (18) comme au n° 38.

Une autre remarque : aux n°s 30 et 40, nous avons dit que quand la masse m_1 est infiniment petite, on peut rapporter les corps A et B à C, parce que le point D se confond avec le point C. Ici la masse m_1 est assez petite pour ne pas influer sur le mouvement du Soleil par rapport au point D, ainsi qu'il arrivait aux n°s 33 et 40, mais la masse m_1 n'est pas assez petite par rapport à m_7 pour que les points C et D puissent être regardés comme confondus.

43. **Cas de la transformation du n° 26.** — Tout ce que nous venons de dire suppose que l'on a adopté le changement de variables du n° 30 qui est celui que nous adopterons d'ordinaire. Qu'arriverait-il si l'on adoptait un autre changement de variables, par exemple celui du n° 26 ?

Au n° 26, nous avons posé

$$x'_1 = x_1 - x_7, \qquad x'_4 = x_4 - x_7, \qquad x'_7 = x_7,$$
$$y'_1 = y_1, \qquad y'_4 = y_4, \qquad y'_7 = y_1 + y_4 + y_7.$$

Nous avons ainsi défini un changement de variables qui n'altère ni la forme canonique des équations, ni la forme des intégrales des aires.

Mais, contrairement à ce qui se passe pour la transformation du n° 30, l'expression de l'énergie cinétique en fonction des y' n'a pas la même forme que son expression en fonction des y.

Nous avons en effet, en tenant compte de la condition $y'_7 = 0$,

$$\frac{y_1^2}{m_1} + \frac{y_4^2}{m_4} + \frac{y_7^2}{m_7} = \frac{y_1'^2}{m_1} + \frac{y_4'^2}{m_4} + \frac{(y'_1 + y'_4)^2}{m_7},$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{y_1'^2}{m'_1} + \frac{y_4'^2}{m'_4} + \frac{2y'_1y'_4}{m_7},$$

en posant

$$m'_1 = \frac{m_1 m_7}{m_1 + m_7}, \qquad m'_4 = \frac{m_4 m_7}{m_4 + m_7}.$$

Nous aurons donc

$$T = \frac{1}{2}\sum \frac{y_i^2}{m_i} = T_1 + T_2 + T_3,$$

où

$$T_1 = \frac{1}{2m'_1}(y'^2_1 + y'^2_2 + y'^2_3),$$

$$T_2 = \frac{1}{2m'_4}(y'^2_4 + y'^2_5 + y'^2_6),$$

$$T_3 = \frac{1}{m_7}(y'_1 y'_4 + y'_2 y'_5 + y'_3 y'_6).$$

Nous aurons donc

$$F = T_1 + T_2 + T_3 - \frac{m_1 m_7}{AC} - \frac{m_4 m_7}{BC} - \frac{m_1 m_4}{AB},$$

et cette fonction F peut être considérée comme formée de quatre parties :

1° $T_1 - \frac{m_1 m_7}{AC}$ qui sert à définir l'ellipse képlérienne dont le point A s'écarte très peu dans son mouvement relatif par rapport au point C ;

2° $T_2 - \frac{m_4 m_7}{BC}$ qui sert à définir l'ellipse képlérienne dont le point B s'écarte très peu dans son mouvement relatif par rapport au point C;

3° $-\frac{m_1 m_4}{AB}$; *c'est la portion principale de la fonction perturbatrice* qui a pour expression

$$-m_1 m_4 \frac{1}{\sqrt{(x'_1 - x'_4)^2 + (x'_2 - x'_5)^2 + (x'_3 - x'_6)^2}};$$

4° Et enfin T_3 qui représente la *partie complémentaire de la fonction perturbatrice.*

44. Méthode usuelle. — Les astronomes se servent encore d'une autre transformation.

Posons

$$x'_1 = x_1 - x_7, \qquad x'_4 = x_4 - x_7.$$

Les deux planètes A et B seront ainsi rapportées l'une et l'autre au Soleil C.

Nous poserons d'ailleurs

$$y'_i = m_i \frac{dx'_i}{dt}.$$

Il est aisé de voir alors que nos équations deviennent

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{dx'_i}{dt} = \dfrac{dF'}{dy'_i}, & \dfrac{dy'_i}{dt} = -\dfrac{dF'}{dx'_i} \qquad (i = 1, 2, 3) \\[2ex] \dfrac{dx'_i}{dt} = \dfrac{dF''}{dy'_i}, & \dfrac{dy'_i}{dt} = -\dfrac{dF''}{dx'_i} \qquad (i = 4, 5, 6), \end{cases}$$

où l'on a

$$F' = \sum \frac{y'^2_i}{2m_i} - U - \frac{m_1^2}{AC} - \frac{m_4^2}{BC} + \frac{m_1 m_4}{BC^3}(x'_1 x'_4 + x'_2 x'_5 + x'_3 x'_6),$$

$$F'' = \sum \frac{y'^2_i}{2m_i} - U - \frac{m_1^2}{AC} - \frac{m_4^2}{BC} + \frac{m_1 m_4}{AC^3}(x'_1 x'_4 + x'_2 x'_5 + x'_3 x'_6).$$

On voit que *les équations* (21) *ne sont pas canoniques* puisque dans certaines d'entre elles figure la fonction F' et dans les autres une autre fonction F''.

Les fonctions F' et F'' se composent de quatre parties :

1° La partie

$$\frac{1}{2m_1}(y'^2_1 + y'^2_2 + y'^2_3) - \frac{m_1 m_7}{AC} - \frac{m_1^2}{AC},$$

qui définit l'ellipse képlérienne dont A s'écarte peu dans son mouvement relatif par rapport à C;

2° La partie

$$\frac{1}{2m_4}(y'^2_4 + y'^2_5 + y'^2_6) - \frac{m_4 m_7}{BC} - \frac{m_4^2}{BC},$$

qui définit l'ellipse képlérienne dont le point B s'écarte peu dans son mouvement relatif par rapport à C;

3° La partie principale de la fonction perturbatrice

$$-\frac{m_1 m_4}{AB};$$

4° La partie complémentaire de la fonction perturbatrice qui est

$$\frac{m_1 m_4}{BC^3}(x'_1 x'_4 + x'_2 x'_5 + x'_3 x'_6),$$

dans F' et

$$\frac{m_1 m_4}{AC^3}(x'_1 x'_4 + x'_2 x'_5 + x'_3 x'_6),$$

dans F''.

Les équations (21) s'obtiennent très aisément et je me bornerai à renvoyer au Chapitre III du Ier Volume de la *Mécanique céleste* de Tisserand.

Ce changement de variables présente de graves inconvénients. Non seulement il altère la forme canonique des équations, mais il ne conserve pas la forme des intégrales des aires.

Aussi n'en ferai-je aucun usage. C'est pour cette raison que je me borne à renvoyer le lecteur à l'Ouvrage de Tisserand.



CHAPITRE III.

LE MOUVEMENT ELLIPTIQUE.

45. Le problème des deux corps. — Considérons deux corps A et C, le premier mobile de masse m, le second fixe de masse M, et étudions le mouvement du premier sous l'influence de l'attraction newtonienne exercée sur lui par le corps fixe.

Nous prendrons le point C pour origine et nous désignerons par x_1, x_2, x_3 les coordonnées du corps A et par y_1, y_2, y_3 les composantes de sa quantité de mouvement.

Le mouvement de ce corps dépend des équations canoniques

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}$$

où

$$(2) \qquad \begin{cases} F = T - U; & T = \dfrac{1}{2m}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2), \\ & U = -\dfrac{mM}{AC}. \end{cases}$$

46. Supposons maintenant deux corps A et C de masses m_1 et m_7, *mobiles tous les deux* et s'attirant mutuellement, d'après la loi de Newton.

Nous représenterons, comme au Chapitre II, les coordonnées du point A par x_1, x_2, x_3, celles du point C par x_7, x_8, x_9 et les composantes des quantités de mouvement de ces deux corps par la lettre y affectée des mêmes indices.

Nous appliquerons le changement de variables du n° 29; nous poserons donc

$$x'_1 = x_1 - x_7, \qquad m'_7 x'_7 = m_1 x_1 + m_7 x_7,$$

$$m'_1 = \frac{m_1 m_7}{m_1 + m_7}, \qquad m'_7 = m_1 + m_7,$$

de telle façon que x'_7, x'_8, x'_9 soient les coordonnées du centre de gravité D des deux corps A et C, et que x'_1, x'_2, x'_3 soient les projections du vecteur CA sur les trois axes.

Nous savons que l'on peut, sans restreindre la généralité, supposer le centre de gravité fixe, supposer, par conséquent :

$$x'_7 = x'_8 = x'_9 = 0,$$

de sorte que le nombre des degrés de liberté est réduit à 3.

Dans ces conditions, les équations du mouvement restent canoniques et s'écrivent

$$(1\ bis) \qquad \frac{dx'_i}{dt} = \frac{dF}{dy'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{dF}{dx'_i}$$

ou

$$(2\ bis) \qquad \left\{ \begin{aligned} & F + T + U; \qquad T = \frac{1}{2m'_1}(y'^2_1 + y'^2_2 + y'^2_3), \\ & \qquad\qquad U = -\frac{m_1 m_7}{AC}. \end{aligned} \right.$$

Si nous comparons les équations (1 *bis*) et (2 *bis*) aux équations (1) et (2), nous verrons que le mouvement relatif du corps A par rapport au corps C est le même que celui d'une masse mobile

$$m'_1 = \frac{m_1 m_7}{m_1 + m_7}$$

attirée par une masse fixe

$$\frac{m_1 m_7}{m'_1} = m_1 + m_7.$$

Nous verrons bientôt qu'une masse mobile attirée par une masse fixe décrit une ellipse dont la masse fixe occupe un des foyers. La trajectoire du point A, dans son mouvement relatif par rapport au point C, sera donc aussi une ellipse, ayant pour foyer C.

Comme les segments AD, DC et AC sont dans un rapport constant et que le point D est supposé fixe, nous voyons que les points A et C, dans leur mouvement *absolu*, décrivent deux ellipses homothétiques ayant pour foyer commun le point D.

47. Emploi de la Méthode de Jacobi. — Nous sommes donc

ramenés à étudier le mouvement d'un corps mobile attiré par un point fixe. Ce problème peut être résolu de bien des manières ; mais, en vue des applications qui vont suivre, il est nécessaire que nous le résolvions par une méthode particulière : par la méthode de Jacobi, exposée au n° 10.

Comme nous avons

$$F = \frac{1}{2m}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - \frac{mM}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}},$$

l'équation de Jacobi s'écrit

$$(3) \qquad \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dS}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dx_2}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dx_3}\right)^2\right] - \frac{mM}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \text{const.}$$

Que devient cette équation quand on adopte de nouvelles coordonnées, soit rectangulaires, soit quelconques. C'est ce que nous apprend l'analyse du n° 11.

On obtiendra l'équation (3) transformée en faisant le changement de variables de Hamilton du n° 8 et en remplaçant p_i par $\frac{dS}{dq_i}$ dans la nouvelle expression de F.

Si l'on adopte d'abord de nouvelles coordonnées rectangulaires x'_1, x'_2, x'_3, on aura (si l'origine reste au point C)

$$T = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx'_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx'_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx'_3}{dt}\right)^2\right]$$

$$AC = x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3,$$

et la dérivée de T, par rapport à $\frac{dx'_i}{dt}$, sera

$$y'_i = m\frac{dx'_i}{dt}.$$

On aura

$$F = \frac{1}{2m}(y'^2_1 + y'^2_2 + y'^2_3) - \frac{mM}{AC},$$

de sorte que la nouvelle équation de Jacobi sera encore

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dS}{dx'_1}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dx'_2}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dx'_3}\right)^2\right] - \frac{mM}{\sqrt{x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3}} = \text{const.}$$

La forme de l'équation de Jacobi ne change donc pas quand on change de coordonnées rectangulaires ou, en d'autres termes, *la*

fonction S *satisfait à une équation aux dérivées partielles dont la forme est indépendante du choix des axes,* pourvu que l'origine reste au point C.

Passons maintenant aux coordonnées polaires en posant

$$x_1 = r \sin\zeta \cos\varphi,$$
$$x_2 = r \sin\zeta \sin\varphi,$$
$$x_3 = r \cos\zeta.$$

Si l'on se rappelle l'expression de la vitesse en coordonnées polaires, on voit que l'on a

$$\mathrm{T} = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 + r^2\sin^2\zeta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right],$$

de sorte que les dérivées de T par rapport à

$$\frac{dr}{dt}, \quad \frac{d\zeta}{dt}, \quad \frac{d\varphi}{dt}$$

sont respectivement

$$\mathrm{R} = m\frac{dr}{dt}, \qquad \mathrm{Z} = mr^2\frac{d\zeta}{dt}, \qquad \Phi = mr^2\sin^2\zeta\frac{d\varphi}{dt},$$

et que l'on a

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2m}\left[\mathrm{R}^2 + \frac{\mathrm{Z}^2}{r^2} + \frac{\Phi^2}{r^2\sin^2\zeta}\right]$$

et

$$\mathrm{F} = \frac{1}{2m}\left[\mathrm{R}^2 + \frac{\mathrm{Z}^2}{r^2} + \frac{\Phi^2}{r^2\sin^2\zeta}\right] - \frac{m\mathrm{M}}{r}.$$

L'équation transformée de Jacobi s'écrit donc

$$(4) \qquad \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{d\mathrm{S}}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{d\mathrm{S}}{d\zeta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\zeta}\left(\frac{d\mathrm{S}}{d\varphi}\right)^2\right] - \frac{m\mathrm{M}}{r} = \text{const.}$$

L'équation (4) est d'ailleurs indépendante du choix des axes.

48. Il s'agit de trouver une intégrale de l'équation (4) dépendant de trois constantes arbitraires.

Cherchons donc à y satisfaire en posant

$$\mathrm{S} = \mathrm{S}_1 + \mathrm{G}\,\zeta$$

et en désignant par $-\dfrac{m^3\mathrm{M}^2}{2\mathrm{L}^2}$ la constante du second membre.

Dans cette expression, S_1 désigne une fonction de r seulement et G représente une constante.

Nous aurons alors

$$\frac{dS}{dr} = \frac{dS_1}{dr}, \qquad \frac{dS}{d\zeta} = G, \qquad \frac{dS}{d\varphi} = 0,$$

et l'équation (4) deviendra

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 + \frac{G^2}{r^2}\right] - \frac{mM}{r} = -\frac{m^3M^2}{2L^2},$$

d'où

$$\frac{dS_1}{dr} = \sqrt{\frac{2m^2M}{r} - \frac{G^2}{r^2} - \frac{m^4M^2}{L^2}},$$

d'où

$$(5) \qquad S_1 = \int dr \sqrt{\frac{2m^2M}{r} - \frac{G^2}{r_2} - \frac{m^4M^2}{L^2}}.$$

49. La solution que nous venons de trouver ne nous suffit pas encore, puisqu'elle ne contient que deux constantes arbitraires L et G. Mais il est aisé de la généraliser; nous avons vu, en effet, que la forme de l'équation (4) est indépendante du choix des axes; or ζ représente l'axe du vecteur AC avec l'axe des x_3. Nous aurons donc une nouvelle solution en prenant

$$S = S_1 + G\zeta,$$

la lettre ζ désignant cette fois l'angle du vecteur AC avec une droite Δ *quelconque* passant par l'origine. Cette droite Δ, en effet, aurait pu être choisie pour axe des x_3 sans que la forme de l'équation (4) en eût été changée.

La nouvelle solution contient cette fois 4 constantes arbitraires, puisqu'il faut 2 constantes pour définir la direction d'une droite passant par l'origine.

Une de ces constantes est superflue, nous assujettirons donc la droite Δ à rester dans le plan des x_1, x_2 et nous appellerons θ l'angle de cette droite Δ avec l'axe des x_1. Nous avons alors trois constantes

$$L, \quad G, \quad \theta.$$

50. Nous n'avons qu'à appliquer la règle du n° 10; nous pose-

rons

$$\frac{dS}{dx_i} = y_i, \quad \frac{dS}{dL} = l, \quad \frac{dS}{dG} = g, \quad \frac{dS}{d\theta} = -\Theta,$$

et alors l, g, Θ seront des constantes ou des fonctions linéaires du temps ; L, G, θ seront des constantes. On aura

$$\frac{dl}{dt} = \frac{d\psi}{dL}, \quad \frac{dg}{dt} = \frac{d\psi}{dG}, \quad \frac{d(-\Theta)}{dt} = \frac{d\psi}{d\theta},$$

où ψ désigne le second membre de l'équation (4) ; on a donc

$$\psi = -\frac{m^3 M^2}{2 L^2}.$$

Nous aurons donc

$$\frac{dl}{dt} = \frac{m^3 M^2}{L^3}, \quad \frac{dg}{dt} = 0, \quad \frac{d\Theta}{dt} = 0.$$

Donc l est une fonction linéaire du temps, g et Θ sont des constantes. Nous poserons, d'ailleurs,

$$\frac{dl}{dt} = n.$$

51. Quelle est la signification de toutes ces formules ?

Le radical

$$\sqrt{\frac{2 m^2 M}{r} - \frac{G^2}{r^2} - \frac{m^4 M^2}{L^2}}$$

devant toujours être réel, le rayon vecteur r ne pourra varier qu'entre certaines limites. Son maximum s'appellera la *distance aphélie* et son minimum la *distance périhélie ;* la moyenne arithmétique sera la *distance moyenne* et sera désignée par a, tandis que les distances aphélie et périhélie seront respectivement désignées par

$$a(1+e), \quad a(1-e).$$

On obtiendra ce maximum et ce minimum pour lesquels le radical cesse d'être réel, en égalant ce radical à zéro, ce qui donne

$$m^4 M^2 r^2 - 2 m^2 M L^2 r + G^2 L^2 = 0.$$

La somme des racines devant être égale à $2a$, on a

$$m^2 M a = L^2,$$

d'où

$$L = m\sqrt{M}\sqrt{a}.$$

Le produit des racines doit être $a^2(1-e^2)$; on a donc

$$\begin{aligned} G^2 L^2 &= m^4 M^2 a^2 (1-e^2), \\ G^2 &= m^2 M a (1-e^2), \\ G &= m\sqrt{M}\sqrt{a(1-e^2)}; \end{aligned}$$

il vient d'ailleurs

$$\frac{dl}{dt} = n = \frac{m^3 M^2}{L^3} = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{a^3}}.$$

Jusqu'ici nous n'avons pas choisi la limite inférieure de l'intégrale (5), de sorte que la fonction S_1 n'est déterminée qu'à une constante près ; nous choisirons pour limite inférieure la distance périhélie $a(1-e)$, de sorte que nous aurons

$$(6) \qquad S_1 = \int_{a(1-e)}^{r} S_1' \, dr,$$

en désignant par S_1' notre radical.

52. Formules du mouvement képlérien. — Examinons l'équation

$$\frac{dS}{d\theta} = \Theta.$$

Je remarque d'abord que S_1 ne dépend pas de θ, c'est-à-dire de l'orientation de la droite Δ. Nous aurons donc

$$\frac{dS}{d\theta} = G\frac{d\zeta}{d\theta}.$$

Considérons une sphère de rayon 1 ayant pour centre l'origine ; l'axe des x_1 viendra percer cette sphère en un point A, le plan des $x_1 x_2$ suivant un grand cercle ABC. La droite fixe Δ, qui est dans le plan des $x_1 x_2$, percera la sphère en B ; le rayon vecteur qui va de l'origine à la masse mobile percera la sphère en D.

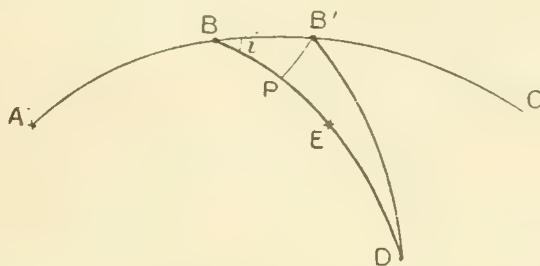
Le plan de Δ et du rayon vecteur coupera la sphère suivant un grand cercle BD qui coupera le grand cercle BC sous un angle que j'appelle i.

L'arc AB mesure l'angle θ et l'arc BD mesure l'angle ζ. Supposons que l'on donne à θ un accroissement $d\theta$, la droite Δ restant dans le plan des $x_1\,x_2$ viendra percer la sphère en un point B' infiniment voisin de B, et l'on aura

$$AB' = \theta + d\theta, \qquad B'D = \zeta + d\zeta,$$

et, par conséquent, $BB' = d\theta$. Je mène un petit arc de cercle B'P

Fig. 2.



perpendiculaire au grand cercle BD; nous savons que B'D est égal à sa projection PD à des infiniment petits près du second ordre. On aura donc

$$BP = -d\zeta.$$

Dans le petit triangle BDP' on a

$$BP = BB' \cos i,$$

et, par conséquent,

$$-\frac{d\zeta}{d\theta} = \cos i$$

et enfin

$$\Theta = G \cos i.$$

Comme Θ et G sont des constantes, cette équation nous montre qu'il en est de même de i.

Ainsi le plan BD passe par la droite *fixe* Δ située dans le plan des $x_1\,x_2$, et son inclinaison i sur ce plan des $x_1\,x_2$ est *constante*. Ce plan BD est donc fixe.

Notre rayon vecteur restera donc constamment dans un plan fixe, ce qui veut dire que *l'orbite de la masse mobile est plane*

Alors θ représente la *longitude du nœud* du plan de l'orbite et i son *inclinaison*.

53. Passons à l'équation

$$\frac{dS}{dL} = l.$$

Le terme $G\zeta$ ne dépendant pas de L, on aura

$$l = \frac{dS_1}{dL}$$

et nous pourrons calculer le second membre en partant de l'intégrale (5) et en différentiant sous le signe $\int$.

On trouve ainsi

$$l = \int \frac{m^4 M^2}{L^3} \frac{dr}{S'_1},$$

les limites d'intégration étant les mêmes que celles de l'intégrale (6).

Nous avons à calculer une intégrale dépendant d'un radical du second degré; l'intégration peut se faire en ramenant aux fonctions circulaires; pour cela il convient de poser

$$r = a(1 - e\cos u).$$

De cette façon, comme $\cos u$ variera entre -1 et $+1$, r variera comme il convient entre la distance périhélie $a(1-e)$ et la distance aphélie $a(1+e)$. La distance périhélie sera atteinte quand u sera un multiple de 2π et la distance aphélie quand u sera un multiple de π.

L'angle auxiliaire u, ainsi introduit, a reçu le nom d'*anomalie excentrique*.

Nous aurons

$$S_1'^2 r^2 = -G^2 + 2m^2 M r - \frac{m^4 M^2}{L^2} r^2.$$

Le second membre est un polynome de second degré en $\cos u$, qui s'annule pour les distances aphélie et périhélie, c'est-à-dire quand u est multiple de π.

Ce polynome est donc proportionnel à $\sin^2 u$.

Pour avoir le coefficient, je ferai $\cos u = +\infty$, en donnant ainsi à u une valeur imaginaire. Dans ces conditions, nous aurons sen-

siblement

$$r = -ae\cos u, \qquad \sin^2 u = -\cos^2 u,$$

$$S_1'^2 r^2 = -\frac{m^4 M^2}{L^2} r^2 = -m^4 M^2 \frac{a^2 e^2}{L^2} \cos u = -m^2 M ae^2 \cos^2 u.$$

On a donc, pour toutes valeurs de r,

$$S_1'^2 r^2 = m^2 M ae^2 \sin^2 u = L^2 e^2 \sin^2 u,$$

d'où

$$l = \int \frac{m^4 M^2}{L^4} \frac{r\,dr}{e \sin u} = \int \frac{r\,dr}{a^2 e \sin u}.$$

Or

$$r = a(1 - e\cos u), \qquad dr = ae \sin u\,du.$$

Il reste donc

$$l = \int_0^u (1 - e\cos u)\,du.$$

La limite inférieure d'intégration doit être, comme pour l'intégrale (6), celle qui correspond à la distance périhélie, c'est-à-dire $u = 0$. On a donc

$$(7) \qquad l = u - e\sin u.$$

C'est l'*équation de Képler*.

Cette équation nous apprend d'abord comment varie le rayon vecteur en fonction du temps. Nous avons, en effet, une relation entre r et u et nous savons que l est une fonction linéaire du temps.

Elle nous montre ensuite que les distances aphélie et périhélie peuvent être effectivement atteintes. Nous ne le savions pas encore, nous savions seulement qu'elles ne pouvaient être dépassées.

Mais l'équation (7) nous montre que l'anomalie excentrique u peut prendre toutes les valeurs réelles possibles et, en particulier, les valeurs qui correspondent aux distances périhélie et aphélie. En effet, à chaque valeur réelle de u correspondra une valeur réelle de l et, par conséquent, une valeur réelle de temps, puisque l est une fonction linéaire du temps.

L'angle l a reçu le nom d'*anomalie moyenne*.

En effet, il varie proportionnellement au temps, et il devient égal à l'anomalie excentrique toutes les fois que $\sin u$ s'annule, c'est-à-dire à tous les périhélies et à tous les aphélies.

54. Passons maintenant à l'équation

$$\frac{dS}{dG} = g,$$

ce qui peut s'écrire

$$g = \frac{dS_1}{dG} + \zeta.$$

Or, l'on a, par différentiation, sous le signe $\int$

$$\frac{dS_1}{dG} = \int \frac{-G\,dr}{r^2 S_1'} = +G \int \frac{d\frac{1}{r}}{S_1'}.$$

Nous allons encore passer aux fonctions circulaires, mais, comme nous avons maintenant pour variable $\frac{1}{r}$, nous poserons

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos v}{a(1 - e^2)},$$

de sorte que $\cos v$ variant de -1 à $+1$, r varie de $a(1-e)$ à $a(1+e)$.

Le carré de S_1' est un polynome du second degré en $\frac{1}{r}$ et, par conséquent, en $\cos v$; et, comme il s'annule aux distances périhélie et aphélie, c'est-à-dire quand v est multiple de π, il sera proportionnel à $\sin^2 v$.

Pour avoir le facteur de proportionnalité, je ferai $\cos v = +\infty$, d'où sensiblement

$$\frac{1}{r} = \frac{e\cos v}{a(1-e^2)} = \frac{m^2 M e \cos v}{G^2},$$

$$\sin^2 v = -\cos^2 v; \qquad S_1'^2 = -\frac{G^2}{r^2} = -\frac{m^4 M^2 e^2 \cos^2 v}{G^2}.$$

On a donc pour toutes les valeurs de v

$$S_1'^2 = \frac{m^4 M^2 dv}{G^2} \sin^2 v, \qquad S_1' = \frac{m^2 M e \sin v}{G}.$$

Or

$$d\frac{1}{r} = \frac{-e \sin v\, dv}{a(1-e_2)} = \frac{-m^2 M e \sin v\, dv}{G^2} = -\frac{S_1'\, dv}{G}$$

et

$$\frac{dS_1}{dG} = -\int dv.$$

L'intégrale doit avoir même limite inférieure que l'intégrale (6), c'est-à-dire celle qui correspond à la distance périhélie, c'est-à-dire $v = 0$. On a donc

$$\frac{dS_1}{dG} = -v,$$

d'où finalement

$$v = \zeta - g.$$

Revenons à la figure et prenons sur le grand cercle BD, qui est fixe, un arc BE égal à g. Comme g est une constante, le point E est fixe, ainsi que le vecteur OE, qui joint ce point à l'origine.

Alors v représentera l'arc ED, ou l'angle du rayon vecteur fixe OE, avec le rayon vecteur OD qui va à la planète. Donc r et v seront les coordonnées polaires de la planète dans le plan OBD, si l'on prend pour pôle le point O et pour axe polaire la droite OE. Donc l'équation

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos v} \tag{8}$$

sera l'équation de l'orbite en coordonnées polaires; or, c'est l'équation d'une ellipse rapportée à son foyer.

L'orbite est donc elliptique.

L'angle v a recu le nom d'*anomalie vraie*. Il est égal à un multiple de 2π au périhélie et à un multiple impair de π à l'aphélie.

L'angle

$$\theta + \zeta = \theta + g + v$$

a reçu le nom de *longitude dans l'orbite*. Au moment du périhélie, on a $v = 0$, la planète est sur le vecteur OE et sa longitude dans l'orbite est $\theta + g$.

Cet angle $\theta + g$, qui est constant, a reçu le nom de *longitude du périhélie*.

55. De l'équation (8) nous déduisons

$$er\cos v = a(1 - e^2) - r = a(1 - e^2) - a(1 - e\cos u),$$

d'où

$$r\cos v = a(\cos u - e).$$

et

$$r \sin v = a\sqrt{(1 - e\cos u)^2 - (\cos u - e)^2} = a\sqrt{1 - e^2}\sin u.$$

Or, les coordonnées rectangulaires de la planète ont pour valeurs : 1° si θ est d'abord supposé nul

$$x_1 = r\cos\zeta, \qquad x_2 = r\sin\zeta\cos i, \qquad x_3 = r\sin\zeta\sin i.$$

2° Si θ est quelconque

$$(8\ bis) \qquad \begin{cases} x_1 = r(\cos\zeta\cos\theta - \sin\zeta\sin\theta\cos i), \\ x_1 = r(\sin\zeta\cos\theta + \cos\zeta\sin\theta), \\ x^3 = r\sin\zeta\sin i. \end{cases}$$

Dans

$$(8\ ter) \qquad \begin{cases} r\cos\zeta = r\cos v\cos g - r\sin v\sin g, \\ r\sin\zeta = r\cos v\sin g + r\sin v\cos g \end{cases}$$

on remplacera $r\cos v$ et $r\sin v$ par leurs valeurs et l'on trouvera

$$(9) \qquad \begin{cases} x_1 = a(\cos u - e)(\cos g\cos\theta - \sin g\sin\theta\cos i) \\ \qquad - a\sin u\sqrt{1 - e^2}(\sin g\cos\theta + \cos g\sin\theta\cos i), \\ x_2 = a(\cos u - e)(\cos g\sin\theta + \sin g\cos\theta\cos i) \\ \qquad + a\sin u\sqrt{1 - e^2}(-\sin g\sin\theta + \cos g\cos\theta\cos i), \\ x_3 = a(\cos u - e)\sin g\sin i \\ \qquad + a\sin u\sqrt{1 - e^2}\cos g\sin i. \end{cases}$$

56. Nous avons posé

$$\frac{dS}{dx_i} = y_i, \qquad \frac{dS}{dL} = l, \qquad \frac{dS}{dG} = g, \qquad \frac{dS}{d\theta} = -\Theta,$$

et, par conséquent,

$$dS = \sum y\,dx + l\,dL + g\,dG - \Theta\,d\theta,$$

d'où il suit que

$$\sum x\,dy - l\,dL - g\,dG - \theta\,d\Theta$$

est une différentielle exacte ; mais j'aurai avantage à introduire encore de nouvelles variables ; en posant

$$L - G = \rho_1, \qquad G - \Theta = \rho_2$$

et

$$L\,l + G\,g + \Theta\,\theta = L\,\lambda + \rho_1\,\omega_1 + \rho_2\,\omega_2, \tag{10}$$

d'où

$$\lambda = l + g + \theta, \qquad \omega_1 = -g - \theta, \qquad \omega_2 = -\theta.$$

On voit que ω_1 est la longitude du périhélie et ω_2 celle du nœud, *toutes deux changées de signe*. Quant à l'angle λ, il a reçu le nom de *longitude moyenne*.

Les variables anciennes L, G, Θ; l, g, θ étant liées aux nouvelles L, ρ_1, ρ_2; λ, ω_1 ω_2 par des relations linéaires, l'identité (10) nous montre que nous sommes dans les conditions du n° 5 et que le changement de variables est canonique. Donc

$$l\,dL + g\,dG + \theta\,d\Theta - \lambda\,dL - \sum \omega\,d\rho$$

sera une différentielle exacte et il en sera de même de

$$\sum x\,dy - \lambda\,dL - \sum \omega\,d\rho$$

ou de

$$\sum y\,dx - L\,d\lambda - \sum \rho\,d\omega.$$

57. Posons maintenant

$$\xi_i = \sqrt{2\rho_i}\cos\omega_i, \qquad \eta_i = \sqrt{2\rho_i}\sin\omega_i.$$

Le changement de variables sera encore canonique en vertu du n° 6; donc

$$\sum \rho\,d\omega - \sum \xi\,d\eta$$

sera une différentielle exacte et il en sera de même de

$$\sum y\,dx - L\,d\lambda - \sum \xi\,d\eta$$

ou de

$$\sum x\,dy - \lambda\,dL - \sum \eta\,d\xi.$$

58. Dans la plupart des applications, l'excentricité e et l'inclinaison i seront de très petites quantités;

$$\rho_1 = L - G = m\sqrt{M}\,\sqrt{a}\,\left(1 - \sqrt{1-e^2}\right)$$

est de l'ordre du carré de l'excentricité;

$$\xi_1 = \sqrt{2\rho_1}\cos\omega_1, \qquad \eta_1 = \sqrt{2\rho_1}\sin\omega_1$$

sont de l'ordre de l'excentricité; c'est pourquoi nous désignerons souvent ces deux variables sous le nom de *variables excentriques :*

$$\rho_2 = G - \Theta = G(1 - \cos i)$$

est de l'ordre du carré de l'inclinaison;

$$\xi_2 = \sqrt{2\rho_2}\cos\omega_2, \qquad \eta_2 = \sqrt{2\rho_2}\sin\omega_2$$

sont de l'ordre de l'inclinaison; c'est pourquoi nous désignerons souvent ces deux variables sous le nom de *variables obliques.*

Nous trouvons d'ailleurs

$$e^2 = \frac{2\rho_1}{L} + \left(\frac{\rho_1}{L}\right)^2,$$

d'où

$$\sqrt{L}\,e\cos\omega_1 = \xi_1\sqrt{1 + \frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{4L}},$$

$$\sqrt{L}\,e\sin\omega_1 = \eta_1\sqrt{1 + \frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{4L}}$$

et

$$\xi_2 = 2\sqrt{G}\sin\frac{1}{2}i\cos\omega_2, \qquad \eta_2 = 2\sqrt{G}\sin\frac{1}{2}i\sin\omega_2.$$

Les variables que nous venons d'introduire servent à définir la forme, les dimensions et l'orientation de l'orbite elliptique, ainsi que la position de la planète sur cette orbite. Nous devons distinguer :

1° Le système des éléments

$$a, \quad e, \quad i, \quad l, \quad g + \theta, \quad \theta,$$

qui ont reçu le nom d'*éléments elliptiques* et sont plus familiers aux astronomes;

2° Le système

$$L, \quad G, \quad \Theta, \quad l, \quad g, \quad \theta;$$

3° Le système

$$L, \quad \rho_1 \quad \rho_2, \quad \lambda, \quad \omega_1, \quad \omega_2;$$

4° Le système

$$L, \quad \xi_1, \quad \xi_2, \quad \lambda, \quad \eta_1, \quad \eta_2.$$

Ces trois derniers systèmes ont reçu le nom d'*éléments canoniques* à cause des propriétés démontrées aux n°s 56 et 57.

59. Nous avons, dans ce qui précède, calculé les coordonnées rectangulaires, ou polaires, en fonctions des éléments elliptiques ou canoniques. Il resterait à calculer les variables y_i ou, ce qui revient au même, à déterminer les vitesses en fonctions des mêmes éléments. Pour cela, nous pourrions nous servir des équations

$$y_i = \frac{dS}{dx_i},$$

ou, en revenant aux coordonnées polaires du n° 47, nous servir des équations

$$(11) \qquad m\frac{dr}{dt} = \frac{dS}{dr}, \qquad m r^2 \frac{d\zeta}{dt} = \frac{dS}{d\zeta}, \qquad m r^2 \sin^2\zeta \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dS}{d\varphi}.$$

Nous pouvons, d'ailleurs, sans restreindre la généralité, supposer, comme au n° 48, que ζ représente l'angle du rayon vecteur avec cet axe et que, par conséquent, le plan de l'orbite passe par l'axe des x_3, car nous savons que le choix des axes est arbitraire. On a alors

$$\frac{dS}{dr} = \frac{dS_1}{dr} = S'_1, \qquad \frac{dS}{d\zeta} = G, \qquad \frac{dS}{d\varphi} = 0.$$

La première des équations (11) donne alors

$$m\frac{dr}{dt} = S'_1,$$

d'où

$$dt = \frac{m\,dr}{S'_1}$$

et

$$dl = n\,dt = \frac{m^4 M^2\,dr}{L^3 S'_1}.$$

Nous retrouvons donc simplement l'équation du n° 53.

60. La troisième équation (11) nous donne simplement $\frac{d\varphi}{dt} = 0$.

ce qui signifie que la vitesse est dans le plan de l'orbite. Quant à la seconde, elle donne

$$mr^2 \frac{d\zeta}{dt} = G.$$

Or $mr \frac{d\zeta}{dt}$ c'est la projection de la quantité de mouvement sur une perpendiculaire au rayon vecteur. Le premier membre n'est donc autre chose que le moment de la quantité de mouvement; de sorte que G représente en *grandeur* le vecteur des aires.

Comme ce vecteur est nécessairement perpendiculaire au plan de l'orbite, ses trois composantes seront

$$G \sin i \sin\theta, \quad -G \sin i \cos\theta, \quad G \cos i = \Theta.$$

61. Cherchons maintenant à calculer les y_i. Nous pourrions nous servir des équations

$$\frac{dS}{dx_i} = y_i,$$

mais il sera préférable de se servir de

$$y_i = m \frac{dx_i}{dt} = mn \frac{dx_i}{dl} = \frac{m^4 M^2}{L^3} \frac{dx_i}{dl}$$

qu'il y aura lieu d'employer quand les x seront exprimés en fonctions de l, g, θ, L, G, Θ, ou de

$$y_i = \frac{m^4 M^2}{L^3} \frac{dx_i}{d\lambda}$$

qu'il y aura lieu d'employer quand les x seront exprimés en fonctions de λ, L, ρ, ω ou de λ, L, ξ, η.

Bien entendu $\frac{dx}{dl}$ ou $\frac{dx}{d\lambda}$ désignent les dérivées partielles de x par rapport à l ou à λ.

62. On peut également se servir des intégrales des aires.

$$x_2 y_3 - x_3 y_2 = G \sin i \sin\theta,$$
$$x_3 y_1 - x_1 y_3 = G \sin i \cos\theta,$$
$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = \Theta.$$

Ces équations ne peuvent suffire pour déterminer les y car elles

ne sont pas distinctes. Mais on y adjoindra l'équation des forces vives

$$\frac{1}{2m}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - \frac{m\mathrm{M}}{r} = -\frac{m^3\mathrm{M}^2}{2\mathrm{L}^2}.$$

63. Il peut y avoir intérêt à mettre les équations (9) sous une forme différente; introduisons deux quantités auxiliaires X et Y en posant

$$\begin{aligned}
\mathrm{X} &= a(\cos u - e)\cos l + a\sin u\sqrt{1-e^2}\sin l = r\cos(v - l),\\
\mathrm{Y} &= -a(\cos u - e)\sin l + a\sin u\sqrt{1-e^2}\cos l = r\sin(v - l).
\end{aligned}$$

Nous voyons que les seconds membres des équations (9) deviendront des fonctions linéaires et homogènes de X et de Y. Il reste à trouver le coefficient de X et celui de Y.

Or, rappelons-nous comment nous avons obtenu les équations (9). Nous nous sommes servis des équations (8 *bis*) et (8 *ter*) sachant que $\zeta = v + g$, nous avons remplacé dans les équations (8 *bis*) $r\cos\zeta$ et $r\sin\zeta$ par leurs valeurs (8 *ter*). Mais on a également

$$\zeta = (v - l) + (g + l),$$

de sorte que les équations (9) deviendront

$$\begin{aligned}
x_1 &= \mathrm{X}[\cos(g+l)\cos\theta - \sin(g+l)\sin\theta\cos i]\\
&\ -\mathrm{Y}[\sin(g+l)\cos\theta + \cos(g+l)\sin\theta\cos i],\\
x_2 &= \mathrm{X}[\cos(g+l)\sin\theta + \sin(g+l)\cos\theta\cos i]\\
&\ +\mathrm{Y}[-\sin(g+l)\sin\theta + \cos(g+l)\cos\theta\cos i],\\
x_3 &= \mathrm{X}\sin(g+l)\sin i + \mathrm{Y}\cos(g+l)\sin i,
\end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire également

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}
x_1 &= \mathrm{X}\left[\cos^2\frac{i}{2}\cos\lambda + \sin^2\frac{i}{2}\cos(\lambda - 2\theta)\right]\\
&\quad - \mathrm{Y}\left[\cos^2\frac{i}{2}\sin\lambda + \sin^2\frac{i}{2}\sin(\lambda - 2\theta)\right],\\
x_2 &= \mathrm{X}\left[\cos^2\frac{i}{2}\sin\lambda - \sin^2\frac{i}{2}\sin(\lambda - 2\theta)\right]\\
&\quad + \mathrm{Y}\left[\cos^2\frac{i}{2}\cos\lambda - \sin^2\frac{i}{2}\cos(\lambda - 2\theta)\right],\\
x_3 &= \mathrm{X}\sin i\sin(\lambda - \theta) + \mathrm{Y}\sin i\cos(\lambda - \theta).
\end{aligned}\right.$$

64. Résumé des formules. — Je crois utile de réunir ici les formules qui lient les x et les y aux éléments canoniques L, λ, ρ, ω, ξ, η. Dans ces formules figureront les deux masses m et M et diverses quantités auxiliaires a, e, i, u, r, v, l, X, Y.

Nous avons d'abord

$$\mathrm{L} = m\sqrt{\mathrm{M}}\sqrt{a},$$

$$\rho_1 = \mathrm{L}(1-\sqrt{1-e^2}), \qquad \rho_2 = (\mathrm{L}-\rho_1)(1-\cos i),$$

$$\xi_1 = \sqrt{2\rho_1}\cos\omega_1, \qquad \eta_1 = \sqrt{2\rho_1}\sin\omega_1;$$

$$\xi_2 = \sqrt{2\rho_2}\cos\omega_2, \qquad \eta_2 = \sqrt{2\rho_2}\sin\omega_2.$$

$$l = \lambda + \omega_1,$$

(7) $$l = u - e\sin u,$$

$$r\cos v = a(\cos u - e)$$

$$r\sin v = a\sqrt{1-e^2}\sin u,$$

$$\mathrm{X} = r\cos(v-l), \qquad \mathrm{Y} = r\sin(v-l),$$

(12 *bis*) $$\left\{\begin{aligned} x_1 = {} & \mathrm{X}\left[\cos^2\frac{i}{2}\cos\lambda + \sin^2\frac{i}{2}\cos(\lambda+2\omega_2)\right] \\ & - \mathrm{Y}\left[\cos^2\frac{i}{2}\sin\lambda + \sin^2\frac{i}{2}\sin(\lambda+2\omega_2)\right], \\ x_2 = {} & \mathrm{X}\left[\cos^2\frac{i}{2}\sin\lambda - \sin^2\frac{i}{2}\sin(\lambda+2\omega_2)\right] \\ & + \mathrm{Y}\left[\cos^2\frac{i}{2}\cos\lambda - \sin^2\frac{i}{2}\cos(\lambda+2\omega_2)\right], \\ x_3 = {} & \mathrm{X}\sin i\sin(\lambda+\omega_2) + \mathrm{Y}\sin i\cos(\lambda+\omega_2), \end{aligned}\right.$$

$$\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2} = r = a(1-e\cos u) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v},$$

$$x_2y_3 - x_3y_2 = -(\mathrm{L}-\rho_1)\sin i\sin\omega_2,$$

$$x_3y_1 - x_1y_3 = -(\mathrm{L}-\rho_1)\sin i\cos\omega_2,$$

$$x_1y_2 - x_2y_1 = \mathrm{L}-\rho_1-\rho_2;$$

$$\frac{1}{2m}(y_1^2+y_2^2+y_3^2) - \frac{m\mathrm{M}}{2} = -\frac{m^3\mathrm{M}^2}{2\mathrm{L}^2}.$$

65. Forme du développement. — Il s'agit maintenant de se servir de ces formules pour développer les coordonnées x_1, x_2, x_3 en séries dépendant des éléments canoniques. Quelle sera la forme du développement?

Pour résoudre cette question, je décomposerai le problème en

deux et j'envisagerai d'abord le développement de X et de Y, puis celui des coefficients de X et de Y dans les équations (12 *bis*).

J'observe d'abord que ρ_1 est développable suivant les puissances de e^2, les coefficients du développement dépendant d'ailleurs de L. Le premier terme du développement est un terme en e^2. Donc $\frac{\sqrt{2\rho_1}}{e}$ sera également développable suivant les puissances de e^2, et il en sera de même de $\frac{e}{\sqrt{2\rho_1}}$.

De l'équation qui lie ρ_1 à e^2 on peut tirer inversement le développement de e^2 suivant les puissances de ρ_1. Nous avons trouvé au n° 58

$$e^2 = \frac{2\rho_1}{L} - \left(\frac{\rho_1}{L}\right)^2.$$

On pourra donc développer $\frac{e}{\sqrt{2\rho_1}}$ suivant les puissances de ρ_1. Or

$$\frac{e}{\sqrt{2\rho_1}} = \frac{e\cos\omega_1}{\xi_1} = \frac{e\sin\omega_1}{\eta_1}$$

et

$$2\rho_1 = \xi_1^2 + \eta_1^2.$$

Il résulte de là que $e\cos\omega_1$ et $e\sin\omega_1$ sont développables suivant les puissances de ξ_1 et η_1; c'est ce qui résulte d'ailleurs des formules du n° 58. Les coefficients de tous ces développements dépendent de L.

66. Je dis maintenant que $u-l$, $\cos(u-l)$ et $\sin(u-l)$ sont développables suivant les puissances de $e\cos l$ et de $e\sin l$.

Envisageons, en effet, l'équation de Képler

$$(7) \qquad l = u - e\sin u,$$

nous pourrons l'écrire

$$(u-l) - e\sin l\cos(u-l) - e\cos l\sin(u-l) = 0.$$

Le premier membre est développable suivant les puissances de $(u-l)$, $e\sin l$, $e\cos l$. Quelle est la condition pour qu'on puisse en tirer $(u-l)$ développé suivant les puissances de $e\sin l$ et $e\cos l$? C'est, d'après le théorème des fonctions implicites, dû à Cauchy (ou, comme aurait dit Laplace, d'après le théorème sur le

retour des suites), que la dérivée partielle du premier membre par rapport à l'inconnue $(u - l)$ ne s'annule pas quand on y fait $e\cos l = 0$, $e\sin l = 0$. Or, cette condition est remplie; car cette dérivée se réduit à l'unité.

Donc $(u - l)$ est développable suivant les puissances de $e\cos l$ et $e\sin l$, et il en est de même de $\cos(u - l)$ et $\sin(u - l)$ qui sont développables suivant les puissances de $(u - l)$.

Il en est de même, évidemment, de

$$e^2\cos(u + l) = e^2\cos 2l\cos(u - l) - e^2\sin 2l\sin(u - l),$$

car

$$e^2\cos 2l = (e\cos l)^2 - (e\sin l)^2; \qquad e^2\sin 2l = 2(e\cos l)(e\sin l)$$

et il en est de même, pour une raison analogue, de $e^2\sin(u + l)$.

67. J'observe maintenant que l'on a

$$\frac{X}{a} = \cos(u - l)\frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{2} + e^2\cos(u + l)\frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{2e^2} - e\cos l,$$

$$\frac{Y}{a} = \sin(u - l)\frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{2} - e^2\sin(u + l)\frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{2e^2} + e\sin l.$$

Nous venons de voir que $\frac{\cos}{\sin}(u - l)$ et $e^2\frac{\cos}{\sin}(u + l)$ sont développables suivant les puissances de $e\cos l$, $e\sin l$. Il en est de même de

$$\frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{2}, \quad \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{2e^2},$$

car ces deux fonctions sont développables suivant les puissances de e^2.

Il en résulte que $\frac{X}{a}$ et $\frac{Y}{a}$ sont développables suivant les puissances de

$$e\cos l, \quad e\sin l;$$

ou encore suivant les puissances de

$$e\cos\omega_1, \quad e\sin\omega_1,$$

puisque

$$e\cos l = e\cos\omega_1\cos\lambda - e\sin\omega_1\sin\lambda,$$
$$e\sin l = e\sin\omega_1\cos\lambda + e\cos\omega_1\sin\lambda;$$

ou encore suivant les puissances de

$$\xi_1, \quad \eta_1,$$

puisque $e\cos\omega_1$, $e\sin\omega_1$ sont développables suivant les puissances de ξ_1 et η_1.

Donc finalement X et Y sont développables suivant les puissances de ξ_1 et η_1; les coefficients du développement dépendent d'ailleurs de L et de λ.

68. Passons maintenant aux coefficients de X et de Y dans les équations (12 *bis*) qui sont de la forme

$$\pm\cos^2\frac{i}{2}\,{\cos \atop \sin}\,\lambda \pm \sin^2\frac{i}{2}\,{\cos \atop \sin}\,(\lambda + 2\omega_2)$$

ou

$$\sin i\,{\cos \atop \sin}\,(\lambda + \omega_2).$$

Je dis que ces coefficients sont développables suivant les puissances de

(13) $$\sin\frac{i}{2}\cos\omega_2, \qquad \sin\frac{i}{2}\sin\omega_2.$$

Il en est évidemment ainsi de $\sin^2\frac{i}{2}$ qui est la somme des carrés de ces deux quantités (13); de

$$\cos^2\frac{i}{2} = 1 - \sin^2\frac{i}{2},$$

$$\cos\frac{i}{2} = \sqrt{1 - \sin^2\frac{i}{2}};$$

de

$$\sin^2\frac{i}{2}\cos 2\omega_2, \quad \sin^2\frac{i}{2}\sin 2\omega_2,$$

expressions qui sont égales, la première à la différence des carrés des deux quantités (13), la seconde à leur double produit; de

$$\sin^2\frac{i}{2}\cos(\lambda + 2\omega_2) = \sin^2\frac{i}{2}\cos 2\omega_2\cos\lambda - \sin^2\frac{i}{2}\sin 2\omega_2\sin\lambda,$$

et de $\sin^2\frac{i}{2}\sin(\lambda + 2\omega_2)$ pour une raison analogue; de

$$\sin i\,{\cos \atop \sin}\,\omega_2 = 2\cos\frac{i}{2}\sin\frac{i}{2}\,{\cos \atop \sin}\,\omega_2;$$

de

$$\sin i \cos(\lambda + \omega_2) = \sin i \cos\omega_2 \cos\lambda - \sin i \sin\omega_2 \sin\lambda$$

et de même de $\sin i \sin(\lambda + \omega_2)$.

Il résulte de là que les coefficients en question de X et de Y sont développables suivant les puissances des deux quantités (13).

Or, on a

$$\xi_2 = 2\sqrt{L - \rho_1} \sin\frac{i}{2} \cos\omega_2,$$

$$\eta_2 = 2\sqrt{L - \rho_1} \sin\frac{i}{2} \sin\omega_2.$$

Donc nos coefficients sont développables suivant les puissances de

$$\frac{\xi_2}{2\sqrt{L - \rho_1}}, \quad \frac{\eta_2}{2\sqrt{L - \rho_1}}.$$

Or

$$\frac{1}{\sqrt{L - \rho_1}} = \left(L - \frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

est développable suivant les puissances de ξ_1 et η_1.

Donc, finalement, nos coefficients sont développables suivant les puissances de ξ_1, η_1, ξ_2, η_2.

69. En résumé, *nos coordonnées x_i sont développables suivant les puissances de*

$$\xi_1, \quad \eta_1, \quad \xi_2, \quad \eta_2,$$

les coefficients du développement dépendant d'ailleurs de L et de λ.

Inutile d'ajouter que les expressions des x_i sont des fonctions périodiques de λ qui ne changent pas quand on change λ en $\lambda + 2\pi$.

Les développements des y_i sont de même forme; il suffit pour s'en convaincre de se rappeler les formules

$$y_i = \frac{m^4 M^2}{L^3} \frac{dx_i}{d\lambda}.$$

Les x_i et les y_i peuvent donc se développer sous la forme suivante

$$(\alpha) \qquad \sum A \cos(p_0 \lambda + h) \mathfrak{M},$$

où p_0 est un entier, où A et h sont des constantes qui ne

dépendent que de L et où $\mathfrak{M}$ est un monome entier par rapport aux ξ et aux η.

Posons ensuite

$$\xi_i = \sqrt{2\rho_i}\cos\omega_i, \qquad \eta_i = \sqrt{2\rho_i}\sin\omega_i.$$

Je dis que le développement (α) prendra la forme

$$(\beta) \qquad \sum B\rho_1^{q_1}\rho_2^{q_2}\cos(p_0\lambda + p_1\omega_1 + p_2\omega_2 + h),$$

où B et h ne dépendent que de L, où les p sont des entiers positifs ou négatifs, les $2q$ des entiers positifs ou nuls, et de telle façon que $2q_i$ soit de même parité que p_i et au moins égal à p_i en valeur absolue

$$2q_i \geq |p_i|.$$

Je veux montrer que tout développement de la forme (α) peut se mettre sous la forme (β); il me suffit de le démontrer pour chacun des termes du développement. Cela est évident immédiatement si le monome $\mathfrak{M}$ se réduit à l'unité, auquel cas le terme se réduit à $A\cos(p_0\lambda + h)$.

Il me suffira donc de démontrer que, si une expression est développable sous la forme (β), cela sera encore vrai pour cette expression multipliée par ξ_i ou par η_i et, par conséquent, de proche en proche, pour cette expression multipliée par un monome quelconque $\mathfrak{M}$.

Soit donc

$$H = \sum B\rho_1^{q_1}\rho_2^{q_2}\cos(p_0\lambda + p_1\omega_1 + p_2\omega_2 + h).$$

Je dis qu'on pourra également développer sous la forme (β)

$$H\xi_i = H\sqrt{2\rho_i}\cos\omega_i, \qquad H\eta_i = H\sqrt{2\rho_i}\sin\omega_i = H\sqrt{2\rho_i}\cos\left(\omega_i - \frac{\pi}{2}\right),$$

et, plus généralement,

$$H\sqrt{2\rho_i}\cos(\omega_i + h').$$

On a, en effet,

$$H\sqrt{2\rho_i}\cos(\omega_i + h')$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum B\rho_1^{q_1}\rho_2^{q_2}\sqrt{\rho_i}\,[\cos(p_0\lambda + p_1\omega_1 + p_2\omega_2 + \omega_i + h + h')$$
$$+ \cos(p_0\lambda + p_1\omega_1 + p_2\omega_2 - \omega_i + h - h')].$$

Cette expression est bien de la forme (β); car, si nous supposons $i=1$ pour fixer les idées, nous voyons que $2q_2$ et p_2 n'ont pas changé, que $2q_1$ s'est changé en $2q_1+1$, tandis que p_1 s'est s'est changé en p_1+1 dans l'un des termes et en p_1-1 dans l'autre.

Or, si

$$2q_1 \equiv p_1 \pmod 2), \qquad 2q_1 \geqq |p_1|,$$

on aura évidemment

$$2q_1+1 \equiv p_1+1 \equiv p_1-1 \pmod 2),$$
$$2q_1+1 \geqq |p_1+1|, \qquad 2q_1+1 \geqq |p_1-1|,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

70. *Symétrie.* — Si l'on faisait tourner l'orbite elliptique et la planète d'un angle ε autour de l'axe des x_3 (comme si la planète et son orbite formaient un seul corps solide),

$$l, \quad g, \quad \theta, \quad L, \quad G, \quad \Theta$$

se changeraient en

$$l, \quad g, \quad \theta+\varepsilon, \quad L, \quad G, \quad \Theta;$$

$$L, \quad \rho_1, \quad \rho_2, \quad \lambda, \quad \omega_1, \quad \omega_2$$

se changeraient en

$$L, \quad \rho_1, \quad \rho_2, \quad \lambda+\varepsilon, \quad \omega_1-\varepsilon, \quad \omega_2-\varepsilon;$$

et

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3$$

se changeraient en

$$x_1 \cos\varepsilon - x_2 \sin\varepsilon, \quad x_1 \sin\varepsilon + x_2 \cos\varepsilon, \quad x_3.$$

Si, dans le développement des x, on remplace les ξ et les η par leurs valeurs en fonctions des ρ et des ω, on obtiendra des séries procédant suivant les sinus et les cosinus des multiples de λ, ω_1, ω_2.

Nous aurons donc

$$x_i = \sum A \cos(p_0\lambda + p_1\omega_1 + p_2\omega_2 + h),$$

p_0, p_1 et p_2 étant des entiers, A et h des fonctions de L, ρ_1 et ρ_2.

J'écrirai

$$(4)\qquad \begin{cases} x_1 = \sum A \cos(p_0\lambda + p_1\omega_1 + p_2\omega_2 + h), \\ x_2 = \sum A' \cos(p_0\lambda + p_1\omega_1 + p_2\omega_2 + h'), \\ x_3 = \sum A'' \cos(p_0\lambda + p_1\omega_1 + p_2\omega_2 + h''). \end{cases}$$

Si je change λ, ω_1, ω_2 en $\lambda + \varepsilon$, $\omega_1 - \varepsilon$, $\omega_2 - \varepsilon$; l'argument des cosinus augmentera de

$$(p_0 - p_1 - p_2)\varepsilon,$$

et x_1, x_2, x_3 devront se changer en

$$x_1 \cos\varepsilon - x_2 \sin\varepsilon, \quad x_1 \sin\varepsilon + x_2 \cos\varepsilon, \quad x_3.$$

Nous en conclurons :

1° Que

$$p_0 - p_1 - p_2 = 1$$

dans le développement de x_1 et de x_2 et que

$$p_0 - p_1 - p_2 = 0$$

dans le développement de x_3;

2° Que

$$A = A', \qquad h' = h - \frac{\pi}{2}.$$

71. Considérons encore la figure formée par la planète et son orbite elliptique et remplaçons cette figure par sa symétrique par rapport au plan des $x_1 x_3$. Cela revient à changer

$$L, \quad G, \quad \Theta, \quad l, \quad g, \quad \theta$$

en

$$L, \quad G, \quad \Theta, \quad -l, \quad -g, \quad -\theta,$$

ou

$$L, \quad \rho_1, \quad \rho_2, \quad \lambda, \quad \omega_1, \quad \omega_2$$

en

$$L, \quad \rho_1, \quad \rho_2, \quad -\lambda, \quad -\omega_1, \quad -\omega_2;$$

ou, enfin,

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3$$

en

$$x_1, \quad -x_2, \quad x_3.$$

Il faut donc que x_2 change de signe et que x_1 et x_3 ne changent pas, quand les trois angles λ, ω_1, ω_2 changent de signe. Cela revient à dire que dans les développements (14) on doit avoir

$$h = h'' = 0, \qquad h' = -\frac{\pi}{2},$$

de sorte que ces développements deviennent

$$(14\ bis)\qquad \begin{cases} x_1 = \sum A \cos(p_0\lambda + p_1\omega_1 + p_2\omega_2), \\ x_2 = \sum A' \sin(p_0\lambda + p_1\omega_1 + p_2\omega_2), \\ x_3 = \sum A'' \cos(p_0\lambda + p_1\omega_1 + p_2\omega_2). \end{cases}$$

72. Considérons toujours la même figure et remplaçons-la par sa symétrique par rapport au plan des $x_1 x_2$. Cela revient à changer les variables obliques ξ_2 et η_2 en $-\xi_2$ et $-\eta_2$, ou encore à changer ω_2 en $\omega_2 + \pi$.

Dans ces conditions x_1 et x_2 ne doivent pas changer et x_3 doit changer de signe.

Donc p_2 est pair dans les développements (14) ou (14 *bis*) de x_1 et de x_2 et impair dans ceux de x_3.

Si l'on rapproche ce résultat de celui que nous avons obtenu au n° 70, nous voyons que $p_0 - p_1$ ou $p_0 + p_1$ sont toujours impairs.

73. **Homogénéité**. — Quand e, i, l, g, θ restant constants, le demi-grand axe a se change en $a(1+\varepsilon)$, les coordonnées x_1, x_2, x_3 se changent en $x_1(1+\varepsilon)$, $x_2(1+\varepsilon)$, $x_3(1+\varepsilon)$.

Dans les mêmes conditions $\frac{L}{m\sqrt{M}}$, $\frac{\rho_1}{m\sqrt{M}}$, $\frac{\rho_2}{m\sqrt{M}}$ sont multipliés par la racine carrée de ce même facteur ou $\sqrt{1+\varepsilon}$.

Donc les coordonnées x_i seront homogènes de degré 2 en

$$\frac{L}{m\sqrt{M}}, \quad \frac{\rho}{m\sqrt{M}}$$

ou en

$$\frac{L}{m\sqrt{M}}, \quad \frac{\xi^2}{m\sqrt{M}}, \quad \frac{\eta^2}{m\sqrt{M}}.$$

Voyons ce que nous pouvons conclure au sujet de la forme des

développements (14 *bis*). Les coefficients A et A″ qui figurent dans ces développements seront une somme de termes de la forme suivante :

$$\text{A} \quad \text{ou} \quad \text{A}'' = \sum \text{B}\,\text{L}^{2-q_1-q_2}\rho_1^{q_1}\rho_2^{q_2}\frac{1}{m^2\text{M}},$$

où $2q_1$ est un entier de même parité que p_1 et au moins égal à $|p_1|$, et où $2q_2$ est un entier de même parité que p_2 et au moins égal à $|p_2|$, et où B est une constante numérique.

On aura d'ailleurs

$$y_1 = -\sum \text{C}\;m^2\text{M}\text{L}^{-1-q_1-q_2}\rho_1^{q_1}\rho_2^{q_2}\sin(p_0\lambda + p_1\omega_1 + p_2\omega_2),$$

$$y_2 = \sum \text{C}\;m^2\text{M}\text{L}^{-1-q_1-q_2}\rho_1^{q_1}\rho_2^{q_2}\cos(p_0\lambda + p_1\omega_1 + p_2\omega_2),$$

$$y_3 = -\sum \text{C}''\,m^2\text{M}\text{L}^{-1-q_1-q_2}\rho_1^{q_1}\rho_2^{q_2}\sin(p_0\lambda + p_1\omega_1 + p_2\omega_2),$$

C et C″ étant des constantes numériques égales à $\text{B}p_0$.

J'ai dit que $2q_1$ devait être un entier de même parité que p_1 et au moins égal à p_1 ; c'est en effet la condition pour que

$$\rho_1^{q_1}\cos(p_1\omega_1 + h),$$

où h est indépendant de ρ_1 et de ω_1, soit développable suivant les puissances de

$$\sqrt{2\rho_1}\cos\omega_1 = \xi_1, \qquad \sqrt{2\rho_1}\sin\omega_1 = \eta_1.$$



CHAPITRE IV.

PRINCIPES DE LA MÉTHODE DE LAGRANGE.

74. **Orbites osculatrices.** — Reportons-nous à la figure 1 et aux hypothèses du n° 30; envisageons par conséquent le mouvement des deux planètes fictives A′ et B′. Nous avons vu aux n°s 37 et 38 que l'on peut poser $F = F_0 + \mu F_1$, que μF_1 est beaucoup plus petit que F_0, et que, si l'on remplaçait F par F_0, le mouvement de la planète fictive A′ serait le même que si elle était attirée par une masse fixe $m_1 + m_7$ placée à l'origine, tandis que le mouvement de la planète fictive B′ serait le même que si elle était attirée par une masse fixe $m_1 + m_4 + m_7$ placée à l'origine. Il résulte de là que, *en première approximation*, le mouvement de ces deux planètes fictives se fait conformément aux lois de Képler.

Supposons qu'à l'instant t les forces qui agissent (1) sur la planète fictive A′ viennent brusquement à disparaître pour être remplacées par une force unique due à l'attraction d'une masse fixe $m_1 + m_7$ placée à l'origine. A partir de l'instant t, la planète A′ décrirait une orbite elliptique, et c'est ce qu'on appelle *l'orbite osculatrice de la planète* A′.

Ou, si l'on aime mieux, nous envisageons une nouvelle planète fictive A″, qui a même masse que A′, c'est-à-dire m'_1; qui, *à l'instant* t, a mêmes coordonnées que A′ et même vitesse tant en grandeur qu'en direction; et qui, soumise seulement à l'attraction d'une masse fixe $m_1 + m_7$ située à l'origine, se meut conformément aux lois de Képler. A l'instant t, la planète A″ a mêmes coordonnées que A′, c'est-à-dire x'_1, x'_2, x'_3 et les composantes de la quan-

(1) Peut-être ce langage est-il incorrect, puisque à cette planète qui est *fictive* aucune force ne peut être *réellement* appliquée. Peut-être faudrait-il dire : les forces fictives qui *semblent* agir...; peu importe d'ailleurs puisque aucune confusion n'est à craindre.

tité de mouvement sont les mêmes, c'est-à-dire y'_1, y'_2, y'_3. Mais, à tout autre instant que l'instant t, la planète A″ n'a pas les mêmes coordonnées que A′, ni la même quantité de mouvement. L'orbite elliptique de A″ est alors l'*orbite osculatrice de* A′. Les deux définitions reviennent évidemment au même, car la nouvelle planète A″ n'est autre chose que ce que deviendrait A′ si les forces qui agissent sur elle venaient à disparaître et à être remplacées par l'attraction de la masse centrale $m_1 + m_7$.

A un instant t' différent de t, A″ ne coïncide plus avec A′; nous devons donc imaginer une nouvelle planète fictive A‴ qui se meut d'après les lois de Képler et qui, *à l'instant* t', a mêmes coordonnées et même vitesse que A′. L'orbite elliptique de A‴ sera l'*orbite osculatrice de* A′ *à l'instant* t' et elle différera de l'orbite elliptique de A″, c'est-à dire de l'orbite osculatrice de A′ à l'instant t. *L'orbite osculatrice est donc variable avec le temps.*

Cependant, si F se réduisait à F_0, la planète A′ se mouvrait conformément aux lois de Képler; coïncidant un instant avec A″, elle coïnciderait constamment avec A″; donc A″ et A‴ ne différeraient pas et l'orbite osculatrice serait invariable.

En réalité, F ne se réduit pas à F_0, mais la différence, que nous avons appelée μF_1, est très petite. Il en résulte que l'*orbite osculatrice varie, mais qu'elle varie lentement.*

On définirait de la même manière l'orbite osculatrice de B′ : ce serait l'orbite elliptique d'une nouvelle planète fictive B″, qui aurait même masse que B′, c'est-à-dire m'_4, qui, *à l'instant* t, aurait mêmes coordonnées que B′, c'est-à-dire x'_4, x'_5, x'_6, même vitesse en grandeur et en direction et, par conséquent, mêmes composantes de la quantité de mouvement, c'est-à-dire y'_4, y'_5, y'_6, qui enfin se mouvrait d'après les lois de Képler sous l'attraction d'une masse centrale fixe $m_1 + m_4 + m_7$. Nous n'aurions d'ailleurs qu'à répéter ce que nous avons dit des orbites osculatrices de A′.

Nous avons vu au Chapitre III que la forme, les dimensions, l'orientation d'une orbite elliptique, et la position d'une planète sur cette orbite, peuvent être définies à l'aide d'un système de six éléments, dits tantôt *éléments elliptiques*, tantôt *éléments canoniques* (*cf.* n° 58). Les six éléments qui définiront ainsi l'orbite elliptique de A″ (c'est-à-dire l'orbite osculatrice de A′) et la position de A″ sur son orbite (c'est-à-dire la position de A′ sur son

orbite osculatrice) s'appelleront les *éléments osculateurs* de la planète A'.

Dans le mouvement képlérien un seul des éléments est variable (c'est la longitude moyenne λ si l'on adopte l'un des deux derniers systèmes d'éléments définis au n° 58, et l'anomalie moyenne l si l'on adopte l'un des deux premiers) et cet élément varie d'ailleurs proportionnellement au temps. Les cinq autres éléments sont constants.

En ce qui concerne les éléments osculateurs, tous seront variables; mais les variations de l'un d'entre eux seront *sensiblement* mais non exactement proportionnelles au temps; celles des cinq autres seront très lentes. Nous venons de voir, en effet, que l'orbite osculatrice varie, mais qu'elle varie lentement.

On définirait de même les éléments osculateurs de la planète B'.

75. **Cas de la Méthode usuelle.** — Au n° 44 nous avons défini un changement de variables dont les astronomes se sont souvent servis. Bien que nous ne devions pas en faire usage, il peut y avoir intérêt à l'examiner et à définir les orbites osculatrices auxquelles il conduit.

Les deux planètes A et B sont rapportées au Soleil C, c'est-à-dire que l'on introduit deux planètes fictives A' et B' ayant respectivement pour masses m_1 et m_4 en menant OA' égal et parallèle à CA, et OB' égal et parallèle à CB.

Ici encore nous pouvons supposer une nouvelle planète fictive A'' qui, à l'instant t, a mêmes coordonnées et même vitesse que A' et qui décrit une ellipse sous l'attraction d'une masse centrale $m_1 + m_7$; et une autre planète fictive B'' qui, à l'instant t, a mêmes coordonnées et même vitesse que B' et qui décrit une ellipse sous l'attraction d'une masse centrale $m_4 + m_7$ (je dis $m_4 + m_7$ parce que, si l'on négligeait la fonction perturbatrice telle qu'elle a été définie au n° 44, le mouvement de B' serait celui d'une masse mobile attirée par une masse fixe $m_4 + m_7$). L'orbite elliptique de A'' ou celle de B'' seront alors l'orbite osculatrice de A' ou celle de B'. Il n'y a d'ailleurs rien à changer à ce que nous avons dit au numéro précédent.

76. **Cas de la transformation du n° 26.** — Supposons mainte-

nant qu'au lieu d'adopter le changement de variables du n° 30, ainsi que nous le ferons toujours sauf avis contraire, nous avons adopté celui du n° 26. Les planètes fictives A′ et B′ ont pour masses

$$\frac{m_1 m_7}{m_1 + m_7}, \quad \frac{m_4 m_7}{m_4 + m_7}$$

et l'on obtient leurs positions en menant les vecteurs OA′ et OB′ égaux et parallèles à CA et à CB. Elles ont pour coordonnées

$$x'_1, \quad x'_2, \quad x'_3; \qquad x'_4, \quad x'_5, \quad x'_6.$$

Mais les variables

$$y'_1, \quad y'_2, \quad y'_3; \qquad y'_4, \quad y'_5, \quad y'_6$$

ne seront pas proportionnelles aux dérivées des x'; elles ne représenteront donc pas les composantes des quantités de mouvement des deux planètes fictives; elles représenteront, comme on le sait, les composantes des quantités de mouvement absolu des deux planètes *réelles*.

Voici dans ce cas comment on doit définir les orbites osculatrices :

Soit une nouvelle planète fictive A″ qui a même masse $\frac{m_1 m_7}{m_1 + m_7}$ que A′; qui, à l'instant t, a pour coordonnées x'_1, x'_2, x'_3 et pour composantes de sa quantité de mouvement y'_1, y'_2, y'_3; qui enfin se meut conformément aux lois de Képler sous l'attraction d'une masse centrale $m_1 + m_7$.

On voit qu'à l'instant t la planète A″ a mêmes coordonnées que A′, mais qu'elle n'a pas même quantité de mouvement ni par conséquent même vitesse.

La planète A″ décrit une orbite elliptique qui sera l'orbite osculatrice de A′.

On définirait de même la planète fictive B″ et l'orbite osculatrice de B′. Disons seulement que B″ se mouvrait sous l'attraction d'une masse centrale $m_4 + m_7$.

77. Comparaison des orbites osculatrices. — Le plus souvent, au lieu de parler de l'orbite osculatrice de A′ ou de B′, on parle de

l'orbite osculatrice de A ou de B, c'est-à-dire des planètes réelles; cette façon de parler peut être adoptée sans inconvénient : quand on parlera de l'orbite osculatrice de A, on devra entendre qu'il s'agit de celle de la planète fictive correspondante A'.

Cependant on doit faire attention à une chose. Nous venons de voir qu'il y a plusieurs manières de définir les orbites osculatrices et, par conséquent, les éléments osculateurs. Il y en a encore d'autres. Au n° 74, au lieu de rapporter A à C et B au centre de gravité de A et de C, nous aurions pu rapporter B à C et A au centre de gravité de B et de C.

De plus, nous aurions pu attribuer d'autres valeurs aux masses centrales. En effet, le partage de F en deux parties F_0 et μF_1 reste arbitraire dans une assez large mesure; nous aurions pu retrancher une fonction quelconque de F_0 et l'ajouter à μF_1, pourvu qu'elle soit du même ordre de grandeur que la fonction perturbatrice. Par exemple, dans F_0 nous aurions pu remplacer le terme

$$\frac{m_4(m_1+m_7)}{BD}$$

par le terme

$$\frac{m_4 m_7}{BD},$$

puisque la différence $\frac{m_4 m_1}{BD}$ est de l'ordre de μF_1. Alors la masse centrale qu'il aurait convenu de choisir pour définir le mouvement de B'' aurait été non plus

$$\frac{m_4(m_1+m_7)}{m'_4} = m_1 + m_4 + m_7$$

mais bien

$$\frac{m_4 m_7}{m'_4},$$

et il est clair qu'on aurait pu choisir bien d'autres valeurs encore.

Eh bien, ces différentes définitions conduisent à des éléments osculateurs *qui ne sont nullement identiques*. Seulement, les différences sont très faibles; elles sont de l'ordre des masses perturbatrices.

Considérons d'abord le cas des n°s 74 ou 75. Alors la planète A'' a, à l'instant t, non seulement mêmes coordonnées que A', mais aussi même vitesse. L'orbite osculatrice est donc tangente à l'orbite

réelle et, à l'instant $t+\varepsilon$, si ε est très petit, l'écart entre A' et A'' est de l'ordre de ε^2.

Au contraire, dans le cas du n° 76, la planète A'' a, à l'instant t, mêmes coordonnées que A', mais elle n'a pas même vitesse. L'orbite osculatrice rencontre donc l'orbite réelle, elle la coupe sous un angle très aigu; mais elle ne la touche pas. Donc, à l'instant $t+\varepsilon$, l'écart entre A' et A'' est de l'ordre de ε. C'est là un inconvénient incontestable dont il ne faut pas toutefois s'exagérer l'importance, puisque nous venons de voir que les différences sont de l'ordre des masses perturbatrices.

78. **Changement de variables.** — Nous avons vu au Chapitre III et en particulier au n° 64 comment on exprime les coordonnées d'une masse mobile décrivant une orbite elliptique sous l'attraction d'une masse centrale fixe, ainsi que les composantes de sa quantité de mouvement, en fonction des deux masses m et M et des six éléments canoniques

$$L, \quad \lambda, \quad \rho_1, \quad \omega_1, \quad \rho_2, \quad \omega_2.$$

Nous pouvons appliquer ces formules à la planète fictive A''.

Les coordonnées de la masse mobile qui, au n° 64, étaient désignées par x_1, x_2, x_3 sont ici x'_1, x'_2, x'_3; les composantes de la quantité de mouvement qui étaient désignées par y_1, y_2, y_3 sont ici y'_1, y'_2, y'_3; la masse mobile et la masse fixe qui étaient désignées par m et M sont ici m'_1 et m_1+m_7; quant aux six éléments canoniques nous les désignerons par

$$L_1, \quad \lambda_1, \quad \rho_1, \quad \omega_1, \quad \rho_2, \quad \omega_2.$$

Faisons de même pour la planète fictive B''. Les coordonnées qui, au n° 64, étaient désignées par x_1, x_2, x_3 sont ici x'_4, x'_5, x'_6; les composantes de la quantité de mouvement sont y'_4, y'_5, y'_6; la masse mobile et la masse fixe sont m'_4 et $m_1+m_4+m_7$; quant aux six éléments canoniques nous les appellerons

$$L_2, \quad \lambda_2, \quad \rho_3, \quad \omega_3, \quad \rho_4, \quad \omega_4.$$

En résumé, il y a entre

$$x'_1, \quad x'_2, \quad x'_3, \quad y'_1, \quad y'_2, \quad y'_3,$$

$$m'_1, \quad m_1+m_7, \quad L_1, \quad \lambda_1, \quad \rho_1, \quad \omega_1, \quad \rho_2, \quad \omega_2$$

ou entre

$$x'_4,\quad x'_5,\quad x'_6,\quad y'_4,\quad y'_5,\quad y'_6,$$
$$m'_4,\quad m_1+m_4+m_7,\quad L_2,\quad \lambda_2,\quad \rho_3,\quad \omega_3,\quad \rho_4,\quad \omega_4$$

les mêmes relations qu'il y avait au n° 64 et en général au Chapitre III entre

$$x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad y_1,\quad y_2,\quad y_3,$$
$$m,\quad M,\quad L,\quad \lambda,\quad \rho_1,\quad \omega_1,\quad \rho_2,\quad \omega_2.$$

Or nous avons vu au n° 56 que

$$\sum x\,dy - \lambda\,dL - \sum \omega\,d\rho$$

est une différentielle exacte. En appliquant ce résultat soit à la planète A″, soit à la planète B″, nous voyons que

$$\sum x'\,dy' - \lambda_1\,dL_1 - \sum \omega\,d\rho, \tag{1}$$

où l'on donne à x' et y' les indices 1, 2, 3, à ω et ρ les indices 1, 2, est une différentielle exacte et qu'il en est de même de

$$\sum x'\,dy' - \lambda_2\,dL_2 - \sum \omega\,d\rho, \tag{2}$$

où l'on donne à x' et y' les indices 4, 5, 6, à ω et ρ les indices 3, 4.

En faisant la somme on voit que

$$\sum x'\,dy' - \sum \lambda\,dL - \sum \omega\,d\rho \tag{3}$$

est une différentielle exacte. Dans l'expression (3), il faut donner aux indices toutes les valeurs possibles, c'est-à-dire 1, 2, 3, 4, 5, 6 pour x' et y'; 1, 2 pour λ et L; 1, 2, 3, 4 pour ω et ρ.

D'où résulte que, *si nous prenons pour variables nouvelles les* λ, *les* L, *les* ω, *les* ρ, *ce changement de variables est canonique;* et que les équations conserveront leur forme canonique

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\lambda_i}{dt} &= \frac{dF}{dL_i}, & \frac{dL_i}{dt} &= -\frac{dF}{d\lambda_i}, \\ \frac{d\omega_i}{dt} &= \frac{dF}{d\rho_i}, & \frac{d\rho_i}{dt} &= -\frac{dF}{d\omega_i}. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

79. Posons maintenant

$$\xi_i = \sqrt{2\rho_i}\cos\omega_i, \qquad \eta_i = \sqrt{2\rho_i}\sin\omega_i;$$

l'expression

$$\sum \omega\, d\rho - \sum \eta\, d\xi$$

est une différentielle exacte.

Si donc nous prenons pour variables les L, les λ, les ξ et les η, ce changement de variables sera encore canonique et nos équations deviendront

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\lambda_i}{dt} = \dfrac{dF}{dL_i}, & \dfrac{dL_i}{dt} = -\dfrac{dF}{d\lambda_i}, \\[2ex] \dfrac{d\eta_i}{dt} = \dfrac{dF}{d\xi_i}, & \dfrac{d\xi_i}{dt} = -\dfrac{dF}{d\eta_i}. \end{cases}$$

80. **Méthode usuelle.** — Ce que nous venons de dire s'applique, soit que nous adoptions la transformation du n° 30, soit que nous adoptions celle du n° 26. Mais, si nous adoptions la *méthode usuelle*, les équations ne seraient plus canoniques ainsi que nous l'avons vu au n° 44 où nous sommes parvenus aux équations (20).

Mais supposons que l'on considère les six premières de ces équations (20), celles où l'indice i est égal à 1, 2 ou 3, et que l'on y remplace

$$x'_4, \quad x'_5, \quad x'_6, \quad y'_4, \quad y'_5, \quad y'_6$$

par leurs valeurs en fonctions du temps. Ces six équations seront alors canoniques, mais la fonction caractéristique F' dépendra non seulement des inconnues

$$x'_1, \quad x'_2, \quad x'_3, \quad y'_1, \quad y'_2, \quad y'_3,$$

mais encore du temps.

Nous pouvons néanmoins, d'après le n° 12, leur faire subir un changement canonique de variables.

En particulier, l'expression (1) du n° 78 étant une différentielle exacte, nous pouvons transformer ces six équations en prenant pour variables nouvelles

$$L_1, \quad \lambda_1, \quad \rho_1, \quad \omega_1, \quad \rho_2, \quad \omega_2.$$

Elles resteront canoniques. Nous obtiendrons ainsi six équa-

tions de même forme que les équations (4) du n° 78, mais où F est remplacé par F′, et où l'indice i prend seulement la valeur 1 pour L et λ, et les valeurs 1 et 2 pour ρ et ω.

Opérons de même sur les six dernières équations (20) du n° 44. Remplaçons-y

$$x'_1, \quad x'_2, \quad x'_3, \quad y'_1, \quad y'_2, \quad y'_3,$$

par leurs valeurs en fonctions du temps. Ces six équations seront canoniques, la fonction caractéristique sera F″ et elle dépendra non seulement des inconnues

$$x'_4, \quad x'_5, \quad x'_6, \quad y'_4, \quad y'_5, \quad y'_6,$$

mais encore du temps.

L'expression (2) du n° 78 étant une différentielle exacte, ces équations resteront canoniques si l'on prend pour variables nouvelles

$$L_2, \quad \lambda_2, \quad \rho_3, \quad \omega_3, \quad \rho_4, \quad \omega_4.$$

Nous obtiendrons ainsi six équations de même forme que les équations (4) du n° 78, mais où F est remplacé par F″ et où l'indice i prend seulement la valeur 2 pour L et λ et les valeurs 3 et 4 pour ρ et ω.

En résumé, nous retrouvons douze équations de même forme que les équations (4), avec cette différence que, dans six d'entre elles, F doit être remplacé par F′, et dans les six autres par F″.

Il en serait absolument de même pour les équations (5).

81. Emploi des éléments elliptiques. — Au n° 58, nous avons défini quatre systèmes d'éléments, à savoir le système des éléments elliptiques et trois systèmes d'éléments canoniques. Au n° 78, nous avons adopté comme éléments osculateurs ceux du troisième système, celui des ρ et des ω; au n° 79, nous avons adopté le quatrième système. Si nous avions adopté le deuxième système, il n'y aurait rien à changer à ce qui précède, puisque ce système est également canonique.

Mais les astronomes emploient aussi fréquemment le premier système, celui des éléments elliptiques, qui n'est pas canonique. Quels sont les changements qui en résultent?

Comme nous avons des relations entre les éléments canoniques

et les éléments elliptiques, les dérivées par rapport à t des éléments elliptiques s'exprimeront linéairement à l'aide des dérivées par rapport à t des éléments canoniques, les coefficients étant des fonctions connues des éléments elliptiques. En vertu des équations (4), chacune de ces dérivées des éléments canoniques par rapport à t est égale, au signe près, à une dérivée partielle de F par rapport à un des éléments canoniques. A leur tour les dérivées partielles de F par rapport aux éléments canoniques s'expriment linéairement à l'aide des dérivées partielles de F par rapport aux éléments elliptiques, les coefficients étant des fonctions connues des éléments elliptiques.

En résumé, les dérivées par rapport à t des éléments elliptiques s'exprimeront linéairement à l'aide des dérivées partielles de F par rapport aux éléments elliptiques, les coefficients étant des fonctions connues des éléments elliptiques.

Telle est la forme des équations différentielles auxquelles satisfont les éléments elliptiques; elles sont beaucoup plus compliquées que les équations (4) auxquelles satisfont les éléments canoniques.

On peut, grâce aux crochets de Lagrange définis au n° 14, les obtenir sans passer par ce détour.

Soit un système d'équations canoniques

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}.$$

Considérons des accroissements virtuels δx_i et δy_i des variables x_i et y_i, et δF l'accroissement correspondant de F. Si nous multiplions nos équations par δy_i et $-\delta x_i$ et que nous ajoutions, nous trouverons

(6) $$\sum (dx_i\,\delta y_i - dy_i\,\delta x_i) = \delta F\, dt.$$

Supposons que nous exprimions les x et les y en fonctions de $2n$ variables nouvelles

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_{2n},$$

il viendra

$$dx_i = \sum \frac{dx_i}{d\alpha_k} d\alpha_k, \qquad \delta x_i = \sum \frac{dx_i}{d\alpha_k} \delta\alpha_k.$$

Si nous remplaçons dx_i et δx_i par ces valeurs et dy_i, δy_i par les

valeurs analogues, et que nous posions

$$[\alpha_h, \alpha_k] = \sum_i \left(\frac{dx_i}{d\alpha_h} \frac{dy_i}{d\alpha_k} - \frac{dx_i}{d\alpha_k} \frac{dy_i}{d\alpha_h} \right),$$

notre équation (6) devient

$$\sum [\alpha_h, \alpha_k] (d\alpha_h \, \delta\alpha_k - d\alpha_k \, \delta\alpha_h) = \delta F \, dt;$$

la sommation doit être étendue à toutes les combinaisons des indices h et k, les deux combinaisons h, k et k, h ne devant pas être regardées comme distinctes.

Mais si j'observe que

$$[\alpha_h, \alpha_k] = -[\alpha_k, \alpha_h], \qquad [\alpha_h, \alpha_h] = 0,$$

je puis écrire aussi

$$\sum [\alpha_h, \alpha_k] \, d\alpha_h \, \delta\alpha_k = \delta F \, dt,$$

où la sommation doit être étendue à tous les arrangements des indices h et k, les deux arrangements h, k et k, h devant cette fois être regardés comme distincts.

Si nous remplaçons δF par

$$\sum \frac{dF}{d\alpha_k} \delta\alpha_k,$$

et que nous identifiions, il viendra

$$(7) \qquad \sum [\alpha_h, \alpha_k] \frac{d\alpha_h}{dt} = \frac{dF}{d\alpha_k}.$$

Appliquons cette formule au cas qui nous occupe; nos variables, au lieu d'être désignées par x_i et y_i, devront alors être désignées par x'_i et y'_i; intégrons d'abord les équations en réduisant F à F_0; elles se réduiront alors aux équations du mouvement képlérien et elles nous permettront d'exprimer nos inconnues en fonctions des six éléments elliptiques de A'' et des six éléments elliptiques de B''. Supposons que ces douze éléments elliptiques soient précisément nos variables nouvelles que nous appelons $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}$.

La formule (7) nous donne alors les équations différentielles auxquelles doivent satisfaire ces nouvelles variables. Les coefficients $[\alpha_h, \alpha_k]$ sont des fonctions connues des éléments elliptiques.

Mais ces coefficients ne sont autre chose (par rapport aux équations canoniques du mouvement képlérien) que les crochets de Lagrange du n° 14. En effet, parmi nos éléments elliptiques, il y en a deux qui varient proportionnellement au temps : ce sont les deux anomalies moyennes. Soient

$$\alpha_1 = l_1 = n_1 t + \varepsilon_1, \qquad \alpha_2 = l_2 = n_2 t + \varepsilon_2$$

ces deux éléments; c'est-à-dire les anomalies moyennes des deux planètes fictives. Alors ε_1 et ε_2 seront des constantes pour le mouvement képlérien.

Les autres éléments sont des constantes pour le mouvement képlérien.

Considérons alors un des crochets $[\alpha_h, \alpha_k]$; si h et k ne sont pas égaux à 1 ou à 2, il rentre immédiatement dans la définition du crochet de Lagrange, puisque α_h et α_k sont des constantes.

Soit maintenant, par exemple $[\alpha_h, \alpha_k]$, h n'étant égal ni à 1, ni à 2. On a alors

$$\frac{dx_i}{d\alpha_1} = \frac{dx_i}{d\varepsilon_1}, \qquad \frac{dy_i}{d\alpha_1} = \frac{dy_i}{d\varepsilon_1},$$

et, par conséquent,

$$[\alpha_h, \alpha_1] = [\alpha_h, \varepsilon_1],$$

et comme ε_1 est une constante nous retombons sur la définition du crochet de Lagrange.

Reste le cas du crochet $[\alpha_1, \alpha_2]$; ce crochet est nul et il en est de même, en général, de $[\alpha_h, \alpha_k]$ si α_h et α_k sont deux éléments n'appartenant pas à la même planète fictive. Et, en effet,

$$[\alpha_1, \alpha_2] = \sum \left(\frac{dx'_i}{d\alpha_1} \frac{dy'_i}{d\alpha_2} - \frac{dx'_i}{d\alpha_2} \frac{dy'_i}{d\alpha_1} \right).$$

Or, si $i = 1, 2, 3$, les dérivées par rapport à α_2 sont nulles; si, au contraire, $i = 4, 5, 6$, ce sont les dérivées par rapport à α_1 qui sont nulles. Tous les termes du second membre s'annulent donc.

C. Q. F. D.

Tous nos coefficients sont donc des crochets de Lagrange, et il résulte du n° 14 que ce sont des fonctions des constantes du mouvement képlérien, c'est à-dire des éléments α autres que les anomalies moyennes et des deux constantes ε.

Je ne m'arrêterai pas à démontrer qu'ils ne dépendent pas des constantes ε, ce qui serait facile.

Les équations (7) étant beaucoup plus compliquées que les équations (4), je n'en ferai aucun usage. Je termine donc là cette digression en me contentant de renvoyer à l'Ouvrage de Tisserand, Tome I et, en particulier, au Chapitre X et à la page 187, où l'on trouvera les équations en question sous leur forme définitive.

82. Calcul de F_0. — Revenons aux éléments canoniques et à la transformation du n° 30. Nous avons formé les équations (4) et (5) des n°s 78 et 79. Il reste à exprimer F en fonction des éléments osculateurs.

Commençons par F_0; nous avons trouvé au n° 37

$$F_0 = T_1 + T_2 - \frac{m_1 m_7}{AC} - \frac{m_4(m_1 + m_7)}{BD}.$$

D'autre part, nous avons trouvé au n° 64 la formule suivante :

$$(8) \qquad \frac{1}{2m}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - \frac{mM}{r} = -\frac{m^3 M^2}{2L^2}.$$

Appliquons cette formule à la planète fictive A″; il faudra y changer y_1, y_2, y_3 en y'_1, y'_2, y'_3; m et M en m'_1 et $m_1 + m_7$; r en AC, L en L_1, de sorte que le premier terme du premier membre de la formule (8) se réduira à T_1 et que la formule deviendra

$$T_1 - \frac{m_1 m_7}{AC} = -\frac{m'_1 m_1^2 m_7^2}{2L_1^2} = -\frac{M_1}{2L_1^2},$$

où nous avons posé

$$M_1 = m'_1 m_1^2 m_7^2.$$

Appliquons de même la formule (8) à B″; il faudra y changer y_1, y_2, y_3 en y'_4, y'_5, y'_6; m et M en m'_4 et $m_1 + m_4 + m_7$; r en BD, L en L_2, de sorte que le premier terme de (8) se réduira à T_2 et que la formule deviendra

$$T_2 - \frac{m_4(m_1 - m_7)}{BD} = -\frac{m'_4 m_4^2 (m_1 + m_7)^2}{2L_2^2} = -\frac{M_2}{2L_2^2},$$

où nous avons posé

$$M_2 = m'_4 m_4^2 (m_1 + m_7)^2.$$

En additionnant, il vient

$$(9) \qquad F_0 = -\frac{m'_1 m_1^2 m_7^2}{2 L_1^2} - \frac{m'_4 m_4^2 (m_1 + m_7)^2}{2 L_2^2} = -\frac{M_1}{2 L_1^2} - \frac{M_2}{2 L_2^2}.$$

Le même calcul s'appliquerait si l'on avait adopté les transformations du n° 26 ou du n° 44. Les valeurs des masses seules différeraient.

Avec la transformation du n° 26, il aurait fallu faire

$$m = \frac{m_1 m_7}{m_1 + m_7}, \qquad M = m_1 + m_7 \qquad \text{pour A}''.$$

et

$$m = \frac{m_4 m_7}{m_4 + m_7}, \qquad M = \frac{m_7 (m_1 + m_4 + m_7)}{(m_4 + m_7)(m_1 + m_7)} \qquad \text{pour B}''.$$

On aurait obtenu ainsi

$$F_0 = -\frac{m'_1 m_1^2 m_7^2}{2 L_1^2} - \frac{m_4^3 m_7 (m_1 + m_7)}{m_4 + m_7} \frac{1}{2 L_2^2}.$$

Avec la méthode usuelle du n° 44, il aurait fallu faire

$$m = m_1, \qquad M = m_1 + m_7 \qquad \text{pour A}'',$$
$$m = m_4, \qquad M = m_4 + m_7 \qquad \text{pour B}'',$$

et l'on aurait eu

$$F_0 = -\frac{m_1^3 (m_1 + m_7)^2}{2 L_1^2} - \frac{m_4^3 (m_4 + m_7)^2}{2 L_2^2}.$$

Ce que nous devons surtout retenir *c'est que* F *ne dépend que des* L.

83. **Calcul de** μF_1. — Développons maintenant la fonction perturbatrice μF_1. Dans le cas de la transformation du n° 30, cette fonction ne dépend que des coordonnées x'; ces coordonnées, en vertu du n° 69, sont développables suivant les puissances des ξ et des η. En est-il de même de la fonction μF_1 elle-même? Pour que cette fonction μF_1 soit développable suivant les puissances des ξ et des η, il suffit qu'elle soit holomorphe par rapport aux x', quand les ξ et les η sont supposés nuls.

Soit, en effet,

$$\mu F_1 = \varphi(x'_1, x'_2, \ldots, x'_6) = \varphi(x'_i).$$

Soit x'^0_i ce que devient x'_i quand on annule les ξ et les η et posons

$$x'_i = x'^0_i + \delta x'_i.$$

Alors x'^0_i représentera le premier terme du développement de x'_i suivant les puissances des ξ et des η, et $\delta x'_i$ représentera l'ensemble de tous les autres termes.

La fonction $\varphi(x'_i) = \varphi(x'^0_i + \delta x'_i)$ étant holomorphe pour $x'_i = x'^0_i$ sera développable suivant les puissances des $\delta x'_i$, et comme ceux-ci sont développables suivant les puissances des ξ et des η, il en sera de même de $\varphi(x'_i) = \mu F_1$. C. Q. F. D.

Or

$$\mu F_1 = m_1 m_7 \left(\frac{1}{BD} - \frac{1}{AB}\right) + m_4 m_7 \left(\frac{1}{BD} - \frac{1}{BC}\right)$$

ne peut cesser d'être holomorphe que pour

$$BD = 0, \qquad AB = 0 \qquad \text{ou} \qquad BC = 0,$$

c'est-à-dire pour

$$x'_4 = x'_5 = x'_6 = 0,$$

ou pour

$$\frac{x'_4}{x'_1} = \frac{x'_5}{x'_2} = \frac{x'_6}{x'_3} = \frac{m_7}{m_1 + m_7},$$

ou pour

$$\frac{x'_4}{x'_1} = \frac{x'_5}{x'_2} = \frac{x'_6}{x'_3} = -\frac{m_1}{m_1 + m_7}.$$

D'autre part, quand on annule les ξ et les η, il vient

$$x'_1 = K_1 L_1^2 \cos\lambda_2, \qquad x'_2 = K_1 L_1^2 \sin\lambda_1, \qquad x'_3 = 0,$$
$$x'_4 = K_2 L_2^2 \cos\lambda_2, \qquad x'_5 = K_2 L_2^2 \sin\lambda_2, \qquad x'_6 = 0,$$

où

$$K_1 = \frac{1}{m'_1 m_1 m_7}, \qquad K_2 = \frac{1}{m'_4 m_4 (m_4 + m_7)}$$

(K_1 et K_2 étant les valeurs du facteur $\frac{1}{m^2 M}$ correspondant aux deux planètes A″ et B″).

Or ces valeurs des x' ne satisferont aux conditions de non-holo-

morphisme que si

$$L_2 = 0,$$

ou

$$\lambda_1 = \lambda_2, \qquad \frac{K_1 L_1^2}{K_2 L_2^2} = \frac{m_2}{m_1 - m_2}$$

ou

$$\lambda_1 = \lambda_2, \qquad \frac{K_1 L_1^2}{K_2 L_2^2} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2},$$

conditions qui, dans les applications, sont très loin d'être satisfaites.

La conclusion, c'est que la fonction perturbatrice est développable suivant les puissances des ξ et des η ; les coefficients dépendent d'ailleurs des L et des λ, mais il est clair qu'ils doivent être des fonctions périodiques des longitudes moyennes λ et, par conséquent, développables en séries trigonométriques procédant suivant les cosinus et les sinus des multiples de λ. Nous pouvons donc écrire

$$\mu F_1 = \sum A \cos(k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2 + h)\mathfrak{M},$$

où k_1 et k_2 sont des entiers, où A et h dépendent seulement des L, où enfin $\mathfrak{M}$ est un monome entier par rapport aux ξ et aux η.

Ce développement, comme on le verrait en raisonnant comme au n° 69, peut toujours se mettre sous la forme

$$(10) \qquad \mu F_1 = \sum A \rho_1^{q_1} \rho_2^{q_2} \rho_3^{q_3} \rho_4^{q_4} \cos\left(\sum k_i \lambda_i + \sum p_i \omega_i + h\right);$$

dans cette formule, A et h dépendent seulement des L, les k et les p sont des entiers positifs ou négatifs, les $2q_i$ sont des entiers *positifs* et de telle façon que $2q_i$ soit de même parité que p_i et que

$$2q_i \geq |p_i|.$$

Remarquons en passant que les ρ étant de l'ordre du carré des excentricités et des inclinaisons, le terme en question sera de l'ordre

$$2\sum q$$

par rapport aux excentricités et aux inclinaisons.

Nous nous contenterons pour le moment de ces brèves indica-

tions, mais nous reviendrons plus loin en détail sur le développement de la fonction perturbatrice.

84. **Cas de la méthode usuelle.** — Ce que nous avons dit de la fonction perturbatrice s'appliquerait séparément à la partie *principale* et à la partie *complémentaire* de cette fonction, puisque l'une et l'autre s'expriment par des fonctions holomorphes des x'. Et cela resterait vrai, que l'on adopte la transformation du n° 30, ou la méthode usuelle du n° 44.

Mais, dans ce dernier cas, la partie complémentaire de la fonction perturbatrice prend une forme particulièrement simple; il en est de même, d'ailleurs, dans le cas particulier examiné au n° 40.

Cette partie complémentaire est, en effet,

$$\frac{m_1 m_4}{BC^3}(x'_1 x'_4 + x'_2 x'_5 + x'_3 x'_6),$$

pour l'une des planètes, et

$$\frac{m_1 m_4}{AC^3}(x'_1 x'_4 + x'_2 x'_5 + x'_3 x'_6).$$

Posons

$$\psi = x'_1 x'_4 + x'_2 x'_5 + x'_3 x'_6.$$

Le développement de ψ se déduira, d'une manière particulièrement facile, de celui des x'.

Observons maintenant que dans le cas du mouvement d'un point attiré par une masse fixe centrale M, on a les équations différentielles

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{M x_i}{r^3}$$

ou

$$\frac{M x_i}{r^3} = -n^2 \frac{d^2 x_i}{d\lambda^2},$$

ou enfin

$$\frac{x_i}{r^3} = -\frac{m^6 M^3}{L^6}\frac{d^2 x_i}{d\lambda^2}.$$

Si nous voulons appliquer ce résultat à la planète A'', il faut remplacer x_1, x_2, x_3 par x'_1, x'_2, x'_3, r par AC, λ et L par λ_1 et L_1, m et M par m_1 et $m_1 + m_7$, d'où

$$\frac{x'_i}{AC^3} = -\frac{m_1^6 (m_1 + m_7)^3}{L_1^6}\frac{d^2 x'_i}{d\lambda_1^2} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

On obtiendrait de même

$$\frac{x'_i}{\mathrm{BC}^3} = -\frac{m_4^6(m_4+m_7)^3}{\mathrm{L}_2^6}\frac{d^2x'_i}{d\lambda_2^2} \qquad (i=4,5,6),$$

si nous observons qu'en appliquant la formule à B″, il faut faire $r=\mathrm{BC}$, puisque, dans la méthode usuelle, la planète B est rapportée au Soleil C.

Si nous observons alors que x'_1, x'_2, x'_3 ne dépendent pas de λ_2, ni x'_4, x'_5, x'_6 de λ_1, nous aurons

$$m_1 m_4 \frac{\psi}{\mathrm{AC}^3} = -\frac{m_1^7 m_4 (m_1+m_7)^3}{\mathrm{L}_1^6}\frac{d^2\psi}{d\lambda_1^2}$$

et

$$m_1 m_4 \frac{\psi}{\mathrm{BC}^3} = -\frac{m_4^7 m_1 (m_4+m_7)^3}{\mathrm{L}_2^6}\frac{d^2\psi}{d\lambda_2^2},$$

ce qui nous donne les expressions des parties complémentaires cherchées.

85. Cas de la transformation du n° 26. — Si l'on adopte la transformation du n° 26, nous avons vu au n° 43 que la partie complémentaire a pour expression

$$\mathrm{T}_3 = \frac{1}{m_7}(y'_1 y'_4 + y'_2 y'_5 + y'_3 y'_6),$$

et en employant les formules

$$y_i = \frac{m^4 \mathrm{M}^2}{\mathrm{L}^3}\frac{dx_i}{d\lambda}$$

du n° 69 et les appliquant aux planètes A″ et B″, nous trouvons

$$\mathrm{T}_3 = \frac{m_1'^2 m_4'^2 m_1^2 m_4^2 m_7^3}{\mathrm{L}_1^3 \mathrm{L}_2^3}\frac{d^2\psi}{d\lambda_1\, d\lambda_2}.$$

86. Symétrie. — La formule (10) peut recevoir de notables simplifications par suite de considérations de symétrie. En premier lieu, la fonction perturbatrice ne doit pas changer quand on remplace la figure formée par les deux orbites osculatrices, les planètes fictives A′, B′ et les corps réels A, B, C par une figure symétrique par rapport au plan des $x_1 x_3$. Or cela revient à changer les signes de tous les angles λ et ω, ainsi qu'on l'a vu au n° 71.

Le développement (10) ne doit donc pas changer quand on change tous ces signes; il ne contient donc que des cosinus, ce qui revient à dire que

$$h = 0.$$

Ce résultat peut encore s'énoncer autrement si l'on met le développement sous la forme

$$\sum \mathrm{A} \cos(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + h)\mathfrak{M}.$$

Sous cette forme, la constante h doit être égale à zéro ou à $\frac{\pi}{2}$ suivant que le monome $\mathfrak{M}$ est d'ordre pair ou impair par rapport aux η.

87. La fonction perturbatrice ne changera pas non plus quand on fera tourner la figure dont il vient d'être question d'un angle quelconque ε autour de l'axe des x_3.

Or, comme nous l'avons vu au n° 70, cela revient à augmenter toutes les longitudes de ε, c'est-à-dire à changer les λ en $\lambda + \varepsilon$, et les ω en $\omega - \varepsilon$.

Dans ces conditions, le développement (10) ne doit pas être altéré, ce qui revient à dire que les entiers k et p doivent satisfaire à la condition

$$\sum k = \sum p.$$

88. La fonction perturbatrice ne changera pas quand on remplacera cette même figure par une figure symétrique par rapport au plan des $x_1 x_2$.

Mais, ainsi que nous l'avons vu au n° 72, cela revient à changer le signe des variables obliques ξ_2, η_2, ξ_4, η_4. Le développement de F, suivant les puissances des ξ et des η, ne contiendra que des termes de degré pair par rapport à ces variables obliques.

Ou bien encore cela revient à changer ω_2 et ω_4 en $\omega_2 + \pi$ et $\omega_4 + \pi$, et, comme le développement (10) ne doit pas être altéré, cela veut dire que

$$p_2 + p_4$$

est toujours pair.

89. **Homogénéité.** — La fonction F est homogène de degré -1

par rapport aux grands axes et, par conséquent, homogène de degré — 2 par rapport aux L et aux ρ. Il en résulte que, dans le développement (10), le coefficient A est homogène de degré

$$-2-\sum q,$$

par rapport aux L.

90. Intégrales des aires. — Que deviennent les intégrales des aires avec nos nouvelles variables? Nous avons vu, au n° 23, que ces intégrales conservent la même forme quand on passe des variables x et y aux variables x' et y', de telle façon que chaque composante du vecteur des aires est la somme de la composante correspondante du vecteur des aires relatif à la première planète fictive A', et de celle du vecteur des aires relatif à la seconde planète fictive B'. D'autre part, le vecteur des aires est le même à l'instant t pour la planète A' et pour la planète A'', puisque à cet instant elles ont mêmes coordonnées, même masse et même vitesse.

Elle sera la même également pour B' et pour B''.

Or, au n° 60, nous avons vu quelles étaient les trois composantes du vecteur des aires pour une planète se mouvant d'après les lois de Képler; ce sont :

$$(11)\quad \begin{cases} G\sin i\sin\theta = -\eta_2\sqrt{L-\rho_1-\dfrac{\rho_2}{2}}, \\ -G\sin i\cos\theta = -\xi_2\sqrt{L-\rho_1-\dfrac{\rho_2}{2}}, \\ \theta = L-\rho_1-\rho_2. \end{cases}$$

On voit que dans les deux premières de ces expressions figurent à la fois les ξ, les η et les ρ; mais il serait aisé de passer de là soit à une expression en fonction des ρ et des ω, soit à une expression en fonction des ξ et des η.

Appliquons ces formules aux deux planètes A'' et B'' qui décrivent des orbites elliptiques. Nous verrons que les trois composantes du vecteur des aires sont

$$-\eta_2\sqrt{L_1-\rho_1-\frac{\rho_2}{2}},\quad -\xi_2\sqrt{L_1-\rho_1-\frac{\rho_2}{2}},\quad L_1-\rho_1-\rho_2$$

pour A″ et

$$-\eta_4\sqrt{L_2-\rho_3-\frac{\rho_4}{2}},\quad -\xi_4\sqrt{L_2-\rho_3-\frac{\rho_4}{2}},\quad L_3-\rho_3-\rho_4$$

pour B″, de sorte que les intégrales des aires s'écriront

$$(12)\quad \begin{cases} -\eta_2\sqrt{L_1-\rho_1-\frac{\rho_2}{2}}-\eta_4\sqrt{L_2-\rho_3-\frac{\rho_4}{2}}=\text{const.}, \\ -\xi_2\sqrt{L_1-\rho_1-\frac{\rho_2}{2}}-\xi_4\sqrt{L_2-\rho_3-\frac{\rho_4}{2}}=\text{const.}, \\ \sum L-\sum\rho=\text{const.} \end{cases}$$

La dernière des équations (12) peut s'obtenir facilement de la manière suivante :

Nous avons vu, au n° 87, que dans le développement (10) de la fonction perturbatrice μF_1 on a

$$\sum k=\sum p.$$

On a donc

$$\sum\frac{d\mu F_1}{d\lambda}=\sum\frac{d\mu F_1}{d\omega},$$

et comme F ne diffère de μF_1 que par le terme F_0 qui est indépendant des λ et des ω

$$\sum\frac{dF}{d\lambda}=\sum\frac{dF}{d\omega},$$

ou à cause des équations (4)

$$\sum\frac{dL}{dt}-\sum\frac{d\rho}{dt}=0,$$

ou enfin

$$\sum L-\sum\rho=\text{const.}$$

91. Supposons que l'on prenne pour plan des x_1x_2 le plan invariable, les équations (12) se simplifient. En effet, les seconds membres des deux premières équations (12) se réduisent à zéro, et alors on peut déduire de ces équations

$$\frac{\xi_2}{\eta_2}=\frac{\xi_4}{\eta_4},$$

ou

$$\omega_2 = \omega_4$$

et

$$\rho_2\left(L_1 - \rho_1 - \frac{\rho_2}{2}\right) = \rho_4\left(L_2 - \rho_3 - \frac{\rho_4}{2}\right).$$

L'équation $\omega_2 = \omega_4$ n'est pas autre chose que la propriété énoncée au n° 25, sous le nom d'*élimination des nœuds*.

92. Tout ce que nous avons dit jusqu'ici s'étend sans aucune difficulté au cas où l'on a plus de trois corps. Il en est ainsi en particulier des résultats du n° 90. Mais ceux du n° 91, de même que ceux du n° 25, ne seraient plus vrais dans le cas où il y aurait plus de trois corps.

93. **Approximations successives.** — Comme $F = F_0 + \mu F_1$ et que F_0 ne dépend que des L, les équations (4) du n° 78 peuvent s'écrire

$$(4\ bis)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dL}{dt} = -\mu\dfrac{dF_1}{d\lambda}, \qquad \dfrac{d\eta}{dt} = \mu\dfrac{dF_1}{d\xi}, \qquad \dfrac{d\xi}{dt} = -\mu\dfrac{dF_1}{d\eta}, \\ \qquad\qquad \dfrac{d\lambda}{dt} = \dfrac{dF_0}{dL} + \mu\dfrac{dF_1}{dL}, \end{array}\right.$$

et de même les équations (5) du n° 79 peuvent s'écrire

$$(5\ bis)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dL}{dt} = -\mu\dfrac{dF_1}{d\lambda}, \qquad \dfrac{d\omega}{dt} = \mu\dfrac{dF_1}{d\rho}, \qquad \dfrac{d\rho}{dt} = -\mu\dfrac{dF_1}{d\omega}, \\ \qquad\qquad \dfrac{d\lambda}{dt} = \dfrac{dF_0}{dL} + \mu\dfrac{dF_1}{dL}. \end{array}\right.$$

J'ai supprimé les indices i pour simplifier l'écriture.

Cela posé, voici comment les équations (4 *bis*) ou (5 *bis*) peuvent s'intégrer par approximations successives en profitant de la petitesse du paramètre μ.

En première approximation, nous supposerons $\mu = 0$, de telle façon que les L, les ρ, les ω, les ξ, les η seront des constantes et les λ des fonctions linéaires du temps.

Ensuite, dans les seconds membres des trois premières équations (4 *bis*) ou (5 *bis*) je remplace les fonctions inconnues L, λ, ρ, ω, (ou L, λ, ξ, η) par leurs valeurs trouvées en première approximation; ces équations me donnent alors par une simple quadrature de nouvelles valeurs approchées des L, ρ et ω (ou des L, ξ et η).

Dans le second membre de la quatrième équation (4 *bis*) ou (5 *bis*), je remplace les L, ρ et ω (ou les L, ξ et η) par les valeurs ainsi trouvées, et les λ par les valeurs de première approximation. J'ai ainsi par quadrature de nouvelles valeurs approchées des λ.

Et c'est là la deuxième approximation.

Ensuite, dans les seconds membres des trois premières équations (4 *bis*) ou (5 *bis*), je remplace les fonctions inconnues par les valeurs trouvées en deuxième approximation et j'obtiens ainsi pour les L, ρ et ω (ou pour les L, ξ et η) de nouvelles valeurs approchées que je substitue dans le second membre de la quatrième équation, où je remplace d'ailleurs les λ par les valeurs de la deuxième équation.

Et c'est là la troisième approximation.

Et ainsi de suite; à la $n^{\text{ième}}$ approximation, on envisage d'abord les trois premières équations; on remplace les inconnues dans les seconds membres par les valeurs de $(n-1)^{\text{ième}}$ approximation, et l'on calcule par quadrature les valeurs de $n^{\text{ième}}$ approximation de toutes les inconnues, sauf des λ.

On prend ensuite la quatrième équation; dans le second membre, on remplace toutes les inconnues par leurs valeurs de $n^{\text{ième}}$ approximation, sauf les λ que l'on remplace par leur valeur de $(n-1)^{\text{ième}}$ approximation. On obtient enfin par quadrature les valeurs de $n^{\text{ième}}$ approximation des λ.

On voit qu'à chacune des approximations on n'a à effectuer que de simples quadratures.

94. Il s'agit de se rendre compte de l'approximation obtenue. Nous allons chercher à développer nos inconnues suivant les puissances de μ et de voir combien à chaque approximation nos développements contiendront de termes exacts.

Pour cela, nous nous appuierons sur les lemmes suivants :

1° Soient deux fonctions développées suivant les puissances de μ, leur produit sera également développable suivant les puissances de μ, et si l'on remplace ces fonctions par des développements dont les premiers termes seuls sont exacts, de telle façon que le premier terme erroné soit le terme en μ^n, le développement du produit aura aussi ses premiers termes exacts, de telle façon que le premier terme erroné soit le terme en μ^n.

2° Ce résultat s'étend immédiatement à un polynome entier quelconque. Soit P un polynome entier en x, y, z; si x, y, z sont développables suivant les puissances de μ, il en est de même de P; et si l'on remplace x, y, z par des développements approchés où le premier terme erroné soit en μ^n, les premiers termes du développement de P seront exacts, de telle façon que le premier terme erroné soit le terme en μ^n.

3° Considérons maintenant une fonction quelconque $f(x, y, z)$. Soient x_0, y_0, z_0 les valeurs de x, y et z pour $\mu = 0$, c'est-à-dire les premiers termes des développements de x, y, z suivant les puissances de μ. Je dis que la proposition qui précède sera encore vraie si la fonction f est holomorphe en x, y, z pour

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0.$$

Posons en effet

$$x = x_0 + \delta x, \quad y = y_0 + \delta y, \quad z = z_0 + \delta z;$$

la fonction f étant holomorphe sera développable selon les puissances de δx, δy, δz. On pourra donc écrire

$$f = f_0 + f_1,$$

où f_0 contient l'ensemble des termes de degré moindre que n en δx, δy, δz et f_1 l'ensemble des termes de degré au moins égal à n; alors f_0 est un polynome auquel s'applique le lemme précédent.

Supposons maintenant que l'on remplace δx, δy, δz, soit par leurs développements exacts suivant les puissances de μ, soit par des développements dont les premiers termes seuls soient exacts, le premier terme erroné étant en μ^n. Dans les deux cas, f, f_0 et f_1 seront développables suivant les puissances de μ; de plus, comme δx, δy, δz sont divisibles par μ, et que f_1 ne contient que des termes d'ordre n au moins par rapport à δx, δy, δz, cette fonction f_1 sera divisible par μ^n.

Je dis maintenant que dans les deux développements, l'un exact, l'autre rapproché, les termes de degré moindre que n (c'est-à-dire les termes en μ^i où $i < n$) seront les mêmes. Cela est vrai pour f_0 qui est un polynome auquel le lemme s'applique; cela est vrai pour f_1 qui est divisible par μ^n, et qui par conséquent ne contient pas de terme de degré moindre que n en μ. Cela est donc vrai de f.

Ainsi dans le développement approché de f, le premier terme erroné est le terme en μ^n, ou, comme nous le dirons plus brièvement, l'erreur est de l'ordre de μ^n.

95. Il s'agit d'appliquer ces lemmes à la question qui nous occupe. Cela est possible, car F_0 et F_1 sont des fonctions holomorphes de nos inconnues λ, L, ρ, ω (ou λ, L, ξ, η) et il en est de même de leurs dérivées.

Je vois d'abord qu'à chaque approximation nous trouverons pour nos inconnues des expressions développables suivant les puissances de μ. Et en effet, si cela est vrai en (n — 1ième) approximation, quand nous substituerons dans les seconds membres des équations (4 *bis*) ces valeur approchées développables suivant les puissances de μ, ces seconds membres seront eux-mêmes après cette substitution développables suivant les puissances de μ, et il en sera de même des nouvelles valeurs approchées des inconnues, qui se déduisent de ces seconds membres par quadrature.

Si, dans nos développements approchés des inconnues, le premier terme erroné est en μ^n, et si nous substituons ces développements approchés dans F_1, le développement de F_1 aura ses premiers termes exacts, d'après le lemme, et le premier terme erroné sera en μ^n; pour μF_1, le premier terme erroné sera en μ^{n+1}, et de même pour la même raison, si F_1' est une quelconque des dérivées partielles de F_1, l'erreur commise sur $\mu F_1'$ sera de l'ordre de μ^{n+1}.

Sur F_0, ou sur une quelconque des dérivées partielles de F_0, l'erreur commise sera de l'ordre de μ^n.

Après la première approximation. l'erreur commise sur les inconnues est de l'ordre de μ.

Passons à la seconde approximation. Substituons ces premières valeurs approchées dans les seconds membres des trois premières équations (4 *bis*) ou (5 *bis*) qui sont de la forme $\mu F_1'$. L'erreur commise sur ces seconds membres sera de l'ordre de μ^2, et il en sera de même de l'erreur commise sur les nouvelles valeurs approchées des L, ρ, ω (ou L, ξ, η).

Substituons ces nouvelles valeurs approchées dans le second membre de la quatrième équation et remplaçons-y en même temps les λ par leurs valeurs de première approximation. Nous faisons

sur les unes une erreur de l'ordre de μ^2, sur les autres une erreur de l'ordre de μ. L'erreur commise sur $\mu \frac{dF_1}{dL}$ sera donc de l'ordre de μ^2. Quant à l'erreur sur $\frac{dF_0}{dL}$ elle sera également de l'ordre de μ^2, car $\frac{dF_0}{dL}$ ne dépend que des L et l'erreur sur les L est de l'ordre de μ^2. L'erreur sur le second membre de notre quatrième équation et, par conséquent, sur les nouvelles valeurs approchées des λ sera donc aussi de l'ordre de μ^2.

On démontrerait de la même manière qu'à la troisième approximation l'erreur sur les seconds membres des trois premières équations est de l'ordre de μ^3, l'erreur sur les nouvelles valeurs approchées des L, ρ, ω de l'ordre de μ^3, et enfin que l'erreur sur $\mu \frac{dF_1}{dL}$, sur $\frac{dF_0}{dL}$ et, par conséquent, sur le second membre de la quatrième équation et sur les nouvelles valeurs approchées des λ, est aussi de l'ordre de μ^3.

En résumé, *après la $n^{ième}$ approximation, l'erreur commise sur nos inconnues est de l'ordre de μ^n.*

96. Dans la méthode d'approximations du n° 93, nous substituons à la place de nos inconnues, dans les seconds membres de nos équations, des développements obtenus d'une certaine manière. Mais il n'y a là rien d'essentiel. Supposons que dans les seconds membres des trois premières équations (4 *bis*), nous ayons substitué à la place des inconnues d'autres développements pourvu que le premier terme erroné soit de l'ordre de μ^n.

L'analyse du n° 95 nous montre immédiatement que ces équations nous auraient donné pour les L, les ρ et les ω de nouveaux développements approchés où le premier terme erroné serait en μ^{n+1}.

Prenons ensuite la quatrième équation (4 *bis*); dans le second membre, substituons à la place des L, des ρ et des ω ces nouveaux développements et à la place des λ les anciens développements où l'erreur est de l'ordre de μ^n. Ici encore nous verrions immédiatement, par l'analyse du n° 95, que l'équation nous donnerait pour les λ de nouveaux développements approchés où le premier terme erroné serait en μ^{n+1}.

Dans la conduite de nos approximations, nous pouvons, comme

d'ailleurs le bon sens l'indique, laisser de côté les termes erronés de nos développements, en ne conservant que les termes exacts.

A la $n^{\text{ième}}$ approximation, nous substituons dans nos seconds membres nos développements approchés, et nous obtenons pour ces seconds membres eux-mêmes des développements que nous pouvons arrêter au terme en μ^{n-1}, puisque les termes suivants sont erronés.

Dans le second membre de la quatrième équation, nous avons deux termes $\frac{dF_0}{dL}$ et $\mu \frac{dF_1}{dL}$; dans le second terme, il suffira de substituer à la place des inconnues leurs anciens développements qui sont exacts jusqu'au terme en μ^{n-2} inclusivement; l'erreur commise dans le développement de $\mu \frac{dF_1}{dL}$ sera encore de l'ordre de μ^n.

Mais, dans le terme $\frac{dF_0}{dL}$, il faudra remplacer les L $\left(\text{je dis les L parce que } \frac{dF_0}{dL} \text{ ne dépend que des L}\right)$ par leurs nouveaux développements, exacts jusqu'au terme en μ^{n-1} inclusivement, que l'on a obtenus à l'aide des trois premières équations.

97. Il convient de préciser davantage. Considérons, par exemple, les équations (5 *bis*). Je suppose que nous envisagions la solution particulière de ces équations telle que, pour $t = 0$, les inconnues L_i, λ_i, ξ_i, η_i aient pour valeurs initiales

$$L_i^0, \quad \lambda_i^0, \quad \xi_i^0, \quad \eta_i^0,$$

et que nous nous proposions de développer cette solution suivant les puissances de μ.

En première approximation nous aurons

$$(13) \qquad L_i = L_i^0, \qquad \xi_i = \xi_i^0, \qquad \eta_i = \eta_i^0, \qquad \lambda_i = n_i t + \lambda_i^0,$$

où n_i est une constante qui, conformément aux formules du mouvement elliptique, est égale à

$$n_i = \frac{M_i}{(L_i^0)^3},$$

où nous avons posé, comme au n° 82,

$$M_1 = m_1'^3 (m_1 + m_7)^2 \qquad = m_1' m_1^2 m_7^2,$$
$$M_2 = m_4'^3 (m_1 + m_4 + m_7)^2 = m_4' m_4^2 (m_1 + m_7)^2.$$

En $n^{\text{ième}}$ approximation nous aurons

$$(14)\qquad \begin{cases} L_i = L_i^0 - \mu \displaystyle\int_0^t \frac{dF_1}{d\lambda_i}\,dt, \qquad \xi_i = \xi_i^0 - \mu \displaystyle\int_0^t \frac{dF_1}{d\eta_i}\,dt, \\ \qquad\qquad \eta_i = \eta_i^0 + \mu \displaystyle\int_0^t \frac{dF_1}{d\xi_i}\,dt, \end{cases}$$

et

$$(15)\qquad \lambda_i = \lambda_i^0 + \int_0^t \frac{dF_0}{dL_i}\,dt + \mu \int_0^t \frac{dF_1}{dL_i}\,dt.$$

Dans les intégrales qui figurent dans les seconds membres des équations (14) on remplace les inconnues par les valeurs obtenues en $(n-1)^{\text{ième}}$ approximation. On fait de même pour la seconde intégrale du second membre de (15), tandis que pour la première intégrale, où figure sous le signe $\int$ une fonction ne dépendant que des L, nous y remplacerons les L par leurs valeurs données par les équations (14).



CHAPITRE V.

APPLICATION DE LA MÉTHODE DE LAGRANGE.

98. Nous avons vu, à la fin du Chapitre précédent, que nos équations peuvent s'intégrer par approximations successives et que ces approximations peuvent se faire par de simples quadratures. Toutes les quadratures que nous serons conduits à faire dans l'application de cette méthode seront de la forme

$$\int \mathrm{A}\, t^m \cos(\nu t + h)\, dt,$$

où m est un entier positif ou nul, A, ν et h des constantes.

Nous avons d'abord, pour $m = 0$,

$$\int \cos(\nu t + h)\, dt = \frac{\sin(\nu t + h)}{\nu}, \tag{1}$$

et, d'ailleurs,

$$\int e^{i\nu t}\, dt = \frac{e^{i\nu t}}{i\nu}.$$

Si nous différentions cette dernière équation m fois par rapport à ν et que nous divisions par i^m, il vient

$$\int t^m e^{i\nu t}\, dt = \frac{t^m e^{i\nu t}}{i\nu} + \frac{m!}{(m-1)!}\,\frac{t^{m-1} e^{i\nu t}}{\nu^2} + i\,\frac{m!}{(m-2)!}\,\frac{t^{m-2} e^{i\nu t}}{\nu^3} + \ldots$$
$$+ i^{m-3}\frac{m!}{2!}\,\frac{t^2 e^{i\nu t}}{\nu^{m-1}} + i^{m-2}\frac{m!}{1!}\,\frac{t e^{i\nu t}}{\nu^m} + i^{m-1}\frac{m!}{1!}\,\frac{e^{i\nu t}}{\nu^{m+1}},$$

ou en multipliant par $\mathrm{A}e^{ih}$ et prenant la partie réelle

$$(2)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \mathrm{A}\, t^m \cos(\nu t + h)\, dt \\ \displaystyle = \frac{\mathrm{A}\, t^m \sin(\nu t + h)}{\nu} + m\mathrm{A}\, t^{m-1}\frac{\cos(\nu t + h)}{\nu^2} - m(m-1)\mathrm{A}\, t^{m-2}\frac{\sin(\nu t + h)}{\nu^3} - \ldots \\ \displaystyle \pm m!\,\mathrm{A}\,{\cos \atop \sin}(\nu t + h)\,\frac{1}{\nu^{m+1}}. \end{cases}$$

Le terme général du développement est

$$\pm m(m-1)\ldots(m-p+1)\,\mathrm{A}\,{\cos \atop \sin}(\nu t+h)\,\frac{t^{m-p}}{\nu^{p+1}},$$

où l'on doit prendre

$$+\sin,\quad +\cos,\quad -\sin,\quad -\cos,$$

suivant que

$$p\equiv 0,\quad 1,\quad 2,\quad 3\qquad (\mathrm{mod}\ 4).$$

On remarquera la présence de ν au dénominateur. Les formules précédentes deviennent donc illusoires dans le cas où $\nu=0$; elles doivent être remplacées par

$$(3)\qquad \int \mathrm{A}\,dt=\mathrm{A}t,\qquad \int \mathrm{A}t^m\,dt=\frac{\mathrm{A}}{m+1}\,t^{m+1}.$$

99. Appliquons ces principes au problème qui nous occupe, c'est-à-dire à l'intégration des équations (5 *bis*) du n° 93. Nous avons vu au n° 83 que μF_1 et F peuvent se développer suivant les puissances des ξ, des η et des cosinus et sinus des multiples des λ, il en est de même des dérivées partielles de F par rapport aux L, aux λ, aux ξ et aux η. Les seconds membres des équations (5 *bis*) seront donc développables sous la forme

$$(4)\qquad \sum \mathrm{A}\cos(k_1\lambda_1+k_2\lambda_2+h)\,\mathfrak{M},$$

où A et h sont des constantes ne dépendant que des L, où les k sont des entiers et $\mathfrak{M}$ un monome entier par rapport aux ξ et aux η. La constante h est d'ailleurs égale à 0 ou à $-\frac{\pi}{2}$, d'après le n° 86.

En première approximation nous avons

$$\mathrm{L}_i=\mathrm{L}_i^0,\qquad \xi_i=\xi_i^0,\qquad \eta_i=\eta_i^0,\qquad \lambda_i=n_i t+\lambda_i^0.$$

Si, appliquant la règle des n°s 93 ou 97, nous substituons ces valeurs dans les seconds membres des trois premières équations (5 *bis*), ces seconds membres prendront la forme

$$\sum \mathrm{B}\cos(\nu t+h'),$$

où B et h' sont des constantes et où

$$\nu = k_1 n_1 + k_2 n_2.$$

Nous pourrons alors intégrer nos équations à l'aide des formules (1) ou (3) et nous trouverons pour nos inconnues L_i, ξ_i et η_i de nouveaux développements où nous aurons des termes en $\sin(\nu t + h')$ et des termes en t.

Passons à l'équation (15) du n° 97:

$$\lambda_i = \lambda_i^0 - \int_0^t \frac{dF_0}{dL_i} dt + \mu \int_0^t \frac{dF_1}{dL_i} dt.$$

Dans $\frac{dF_1}{dL_i}$, nous devons encore substituer à la place de nos inconnues leurs valeurs approchées L_i^0, ξ_i^0, η_i^0, $n_i t + \lambda_i^0$; nous obtiendrons ainsi pour λ_i des termes en t [provenant de l'application de la formule (3)] et des termes en $\sin(\nu t + h')$ [provenant de l'application de la formule (1)].

Dans $\frac{dF_0}{dL_i}$, il faut, d'après la règle du n° 97, substituer aux L_i les nouveaux développements que nous venons de trouver. Soient

$$L_i = L_i^0 + \delta L_i$$

ces nouveaux développements.

Les δL_i sont développables suivant les puissances de μ, et comme on a, d'ailleurs,

$$\delta L_i = -\mu \int_0^t \frac{dF_1}{d\lambda_i} dt,$$

et que dans $\frac{dF_1}{d\lambda_i}$ les inconnues ont été remplacées par leurs valeurs approchées indépendantes de μ, on voit aisément que le développement de δL_i se réduit à un seul terme, le terme en μ.

Pour $L_i = L_i^0$, $\frac{dF_0}{dL_i}$ se réduit à n_i. D'ailleurs, pour $L_i = L_i^0 + \delta L_i$, la dérivée $\frac{dF_0}{dL_i}$ peut se développer suivant les puissances des δL_i sous la forme

$$\frac{dF_0}{dL_i} = n_i + \frac{d^2 F_0}{dL_i\, dL_1} \delta L_1 + \frac{d^2 F_0}{dL_i\, dL_2} \delta L_2 \quad \cdots.$$

Dans ce développement, nous pouvons négliger les termes du

second degré ou de degré supérieur, parce qu'ils sont de l'ordre de μ^2, et si nous observons, d'autre part, que, d'après la forme de F_0 (*cf.* n° 82), on a

$$\frac{d^2 F_0}{dL_1\, dL_2} = 0, \qquad \frac{d^2 F_0}{dL_i^2} = \frac{dn_i}{dL_i^0},$$

nous pouvons écrire

$$\frac{dF_0}{dL_i} = n_i + \frac{dn_i}{dL_i^0}\,\delta L_i;$$

d'où

$$\int_0^t \frac{dF_0}{dL_i}\,dt = n_i t + \frac{dn_i}{dL_i^0}\int_0^t dL_i\,dt.$$

J'ai pu faire sortir $\frac{dn_i}{dL_i^0}$ du signe $\int$; c'est, en effet, une constante; car les dérivées successives de F_0, quand on y a remplacé les L_i par les constantes L_i^0, se réduisent à des constantes.

Nous avons vu que δL_i contient des termes en $\sin(\nu t + h')$ et peut contenir des termes en t. Nous verrons bientôt que ces termes en t ne peuvent se rencontrer que si le rapport des moyens mouvements $\frac{n_1}{n_2}$ est commensurable; c'est là la propriété connue sous le nom d'*invariabilité des grands axes*.

Cela nous donnera dans $\int \delta L_i\,dt$ et, par conséquent, dans λ_i des termes en $\cos(\nu t + h)$, des termes en t; il pourra y avoir aussi des termes en t^2 [par application de la formule (3)] mais seulement si δL_i contient des termes en t, c'est-à-dire si le rapport des moyens mouvements est commensurable.

C'est là la deuxième approximation qui, à cause de la petitesse des masses perturbatrices, est suffisante pour les besoins de la pratique dans le plus grand nombre des applications.

100. Nous voulons néanmoins pousser l'approximation plus loin et voir quelle est la forme générale des termes de nos développements.

Je dis que tous nos termes seront de la forme

$$(5) \qquad A t^m \cos(\nu t + h),$$

où m est un entier positif ou nul, A et h des constantes et où

$$\nu = k_1 n_1 + k_2 n_2,$$

les k étant des entiers positifs ou négatifs.

J'observe d'abord que le produit de deux quantités de la forme (5) est une somme de termes de la forme (5) et j'en conclus qu'un polynome entier par rapport à plusieurs quantités de la forme (5) est une somme de termes de la forme (5).

Plus généralement, soit f une fonction développable suivant les puissances de x, y, z; si x, y, z sont développables en séries de termes de la forme (5), la fonction f sera elle-même développable en une série de termes de la forme (5).

Si, en effet, dans le développement de f suivant les puissances de x, y, z, je substitue à la place de x, y, z leurs développements, le résultat de cette substitution sera une série dont chaque terme sera un produit d'expressions de la forme (5).

Le n° 98 nous montre ensuite que, en intégrant par rapport à t une expression de la forme (5), on obtient encore une somme de termes de la forme (5), car il est utile de faire observer que

$$\sin(\nu t + h) = \cos\left(\nu t + h - \frac{\pi}{2}\right).$$

Cela posé, envisageons les dérivées partielles de F_1 et de F_0 qui figurent dans les seconds membres de nos équations. Posons

$$L_i = L_i^0 + \delta L_i, \qquad \xi_i = \xi_i^0 + \delta\xi_i, \qquad \eta_i = \eta_i^0 + \delta\eta_i, \qquad \lambda_i = n_i t + \lambda_i^0 + \delta\lambda_i.$$

Les dérivées partielles de F_1 ou de F_0 pourront se développer suivant les puissances des δL, $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\lambda$, sous la forme

$$\sum B\mathfrak{M}',$$

où $\mathfrak{M}'$ est un monome entier par rapport aux δL, $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\lambda$. Quant aux coefficients B, ce seront, d'après la formule de Taylor, des dérivées partielles d'ordre supérieur de F_1 ou de F_0, où les L, ξ, η et λ doivent être remplacés par leurs valeurs approchées

$$L_i^0, \quad \xi_i^0, \quad \eta_i^0, \quad n_i t + \lambda_i^0.$$

Les dérivées partielles d'ordre quelconque de F_1 et F_0 peuvent,

comme ces fonctions elles-mêmes, se mettre sous la forme (4) du n° 99, c'est-à-dire sous la forme

$$\sum A \cos(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + h)\mathfrak{M}.$$

Si l'on y remplace les inconnues par leurs valeurs approchées, ces expressions se réduiront à une somme de termes de la forme (5), car A et $\mathfrak{M}$ se réduiront à des constantes et $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + h$ à

$$\nu t + h'$$

où

$$\nu = k_1 n_1 + k_2 n_2, \qquad h' = h + k_1\lambda_1^0 + k_2\lambda_2^0.$$

Nos coefficients B sont donc des sommes de termes de la forme (5).

Je dis que δL_i, $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$, $\delta\lambda_i$, quelque loin que l'on pousse l'approximation, ne contiendront que des termes de la forme (5). En effet, je suppose que cela ait été démontré pour la $n^{\text{ième}}$ approximation, et je vais montrer que cela est encore vrai à la $(n+1)^{\text{ième}}$. Considérons, en effet, d'abord les trois premières équations (5 *bis*) du n° 93. Les seconds membres sont de la forme $\sum B\mathfrak{M}'$ et, dans le monome $\mathfrak{M}'$, on doit remplacer les δL, ... par leurs valeurs de $n^{\text{ième}}$ approximation. Par hypothèse, ces valeurs se réduisent à une somme de termes de la forme (5). Donc $\mathfrak{M}'$ sera aussi une somme de termes de la forme (5) et, comme il en est de même du coefficient B, il en sera de même de $\sum B\mathfrak{M}'$.

Nos seconds membres sont donc des sommes de termes de la forme (5) et, en intégrant par rapport à t, nous voyons que les nouvelles valeurs des δL_i, $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$, c'est-à-dire leurs valeurs de $(n+1)^{\text{ième}}$ approximation, sont encore de la même forme.

Prenons enfin la quatrième équation (5 *bis*) du n° 93. Dans le second membre, il faut substituer à la place des δL_i, $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$ les valeurs de $(n+1)^{\text{ième}}$ approximation et, à la place des $\delta\lambda_i$, les valeurs de $n^{\text{ième}}$ approximation. Toutes ces valeurs sont des sommes de termes de la forme (5).

On en conclurait, comme plus haut, que le second membre est une somme de termes de la forme (5), et, en intégrant, que la nouvelle valeur de $\delta\lambda_i$, c'est-à-dire sa valeur de $(n+1^{\text{ième}})$ approximation, est encore une somme de termes de la forme (5).

C. Q. F. D.

101. Petits diviseurs — On voit, en se reportant au n° 98, que, par suite des intégrations, le coefficient ν figure au dénominateur. Il en résulte que, si $\nu = 0$, les formules (1) et (2) deviennent illusoires et qu'on doit recourir aux formules (3). Mais

$$\nu = k_1 n_1 + k_2 n_2.$$

Donc ν ne peut s'annuler que si le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ est commensurable ou si

$$k_1 = k_2 = 0.$$

Or, la probabilité pour que le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ soit exactement commensurable est infiniment petite. Nous pouvons donc toujours supposer que ce rapport est incommensurable et, par conséquent, que ν ne peut s'annuler que quand les deux coefficients k sont nuls à la fois.

Mais si ce rapport ne peut être exactement commensurable, il peut être *à peu près* commensurable; dans ce cas, ν peut s'annuler, mais peut devenir très petit. Si ν devient très petit, les termes qui contiennent ν ou une puissance de ν au dénominateur deviennent très grands.

On dit alors que ces termes sont très grands par suite de la présence d'un *petit diviseur*.

Il peut y avoir pour chaque valeur de $\frac{n_1}{n_2}$ une infinité de petits diviseurs. Supposons, en effet, que nous réduisions $\frac{n_1}{n_2}$ en fraction continue et soit $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ une des réduites successives; l'expression

$$\alpha_2 n_1 - \alpha_1 n_2,$$

où les α sont des entiers, est très petite; à chaque réduite correspond donc un petit diviseur; il y en a donc une infinité.

Mais, dans la pratique, on n'aura jamais à envisager que les premiers termes des développements, c'est-à-dire ceux qui correspondent à des valeurs relativement petites des entiers k_1 et k_2. Les premières réduites pourront donc seules entrer en ligne de compte; et le plus souvent, si le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ n'est pas très près d'une valeur commensurable simple, c'est-à-dire du rapport de deux

entiers petits, il arrivera que l'expression

$$\alpha_2 n_1 - \alpha_1 n_2$$

ne sera pas extrêmement petite; car les expressions analogues sont d'autant plus petites qu'elles correspondent à des réduites de rang plus élevé. Dans ce cas, nous n'aurons pas à nous inquiéter des petits diviseurs.

Si, au contraire, le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ est très voisin d'une valeur commensurable simple, l'expression

$$\alpha_2 n_1 - \alpha_1 n_2,$$

correspondant à l'une des premières réduites, sera extrêmement petite. Mais alors il se présentera la circonstance suivante. Soit $\frac{\beta_1}{\beta_2}$ la réduite suivante; je dis que les entiers β_1 et β_2 seront extrêmement grands, de sorte qu'on n'aura pas à considérer le petit diviseur

$$\beta_2 n_1 - \beta_1 n_2$$

qui ne figurera pas dans les termes du développement que l'on conserve.

Soit, en effet, $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ la réduite qui précède $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$; la théorie des fractions continues nous apprend qu'on aura

$$\beta_1 = \gamma_1 + \alpha_1 a,$$
$$\beta_2 = \gamma_2 + \alpha_2 a,$$

a désignant le quotient incomplet correspondant. Si nous posons

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\gamma_1 + \alpha_1 x}{\gamma_2 + \alpha_2 x},$$

on sait que a est la partie entière de x de telle façon que $x - a$ est compris entre zéro et un. On a alors

$$x = \frac{\gamma_1 n_2 - \gamma_2 n_1}{\alpha_2 n_1 - \alpha_1 n_2}.$$

Par hypothèse le dénominateur $\alpha_2 n_1 - \alpha_1 n_2$ est extrêmement petit, donc x et, par conséquent, a sont extrêmement grands. Il en est donc de même de β_1 et de β_2. C. Q. F. D.

Nous n'aurons donc à nous inquiéter ni de la réduite $\frac{\beta_1}{\beta_2}$ ni *a fortiori* des réduites suivantes. Donc, dans la pratique, nous aurons *au plus* à nous inquiéter d'un seul petit diviseur.

Si, au lieu de trois corps, nous en avions un plus grand nombre, quatre par exemple (c'est-à-dire trois planètes), nous aurions

$$\nu = k_1 n_1 + k_2 n_2 + k_3 n_3.$$

La condition que le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ soit incommensurable devrait être remplacée par la suivante : qu'il n'y ait entre les trois moyens mouvements n_1, n_2 et n_3 aucune relation linéaire à coefficients entiers.

102. Forme des développements. — Considérons maintenant nos inconnues comme fonctions des valeurs initiales ξ_i^0 et η_i^0 des ξ_i et des η_i. Je dis qu'*elles seront développables suivant les puissances croissantes des ξ_i^0 et des η_i^0.*

En effet, cela est vrai en première approximation où l'on a simplement $\xi_i = \xi_i^0$, $\eta_i = \eta_i^0$, tandis que les L_i et les λ_i sont indépendants des ξ_i^0 et des η_i^0. Il suffit donc de montrer que, si cela est vrai en $n^{\text{ième}}$ approximation, cela est vrai également en $(n+1)^{\text{ième}}$. Considérons d'abord les trois premières équations (5 *bis*) du n° 93 dont les seconds membres sont de la forme

$$\sum B\,\mathfrak{M}'.$$

Nous avons montré que les coefficients B eux-mêmes sont de la forme

$$\sum A \cos(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + h)\,\mathfrak{M},$$

où l'on doit remplacer les L_i, ξ_i, η_i, λ_i par leurs valeurs approchées L_i^0, ξ_i^0, η_i^0, $n_i t + \lambda_i^0$. Alors $\mathfrak{M}$, qui est un monome entier par rapport aux ξ_i et aux η_i, deviendra un monome entier par rapport aux ξ_i^0 et aux η_i^0, et, comme les autres facteurs ne dépendent pas des ξ_i^0 et des η_i^0, nous voyons que les B sont développables suivant les puissances des ξ_i^0 et des η_i^0.

Quant à $\mathfrak{M}'$, c'est un monome entier par rapport aux δL, $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\lambda$, où ces expressions doivent être remplacées par leurs valeurs

de $n^{\text{ième}}$ approximation. Or, ces valeurs, par hypothèse, sont développables suivant les puissances des ξ_i^0 et des η_i^0. Il en sera donc de même de $\mathfrak{M}'$ et, par conséquent, de nos seconds membres

$$\sum B\mathfrak{M}'.$$

Si nous intégrons, nous verrons que les valeurs de $(n+1)^{\text{ième}}$ approximation des L, ξ, η sont développables suivant les puissances des ξ_i^0 et des η_i^0. En raisonnant sur la quatrième équation (5 *bis*) comme nous venons de le faire sur les trois premières, on verrait qu'il en est encore de même des valeurs de $(n+1)^{\text{ième}}$ approximation des λ.

Nos développements seront donc de la forme

$$(6) \qquad \sum \mu^\alpha A \mathfrak{M}_0 t^m \cos(\nu t + h),$$

où $\mathfrak{M}_0$ est un monome entier par rapport aux ξ_i^0 et aux η_i^0 et où A et h sont des constantes ne pouvant dépendre que des L_i^0 et des λ_i^0. Comme nos expressions sont développées suivant les puissances de μ, nous avons en facteur une puissance de μ que j'ai mise en évidence. Posons

$$\xi_i^0 = \sqrt{2\rho_i^0}\cos\omega_i^0, \qquad \eta_i^0 = \sqrt{2\rho_i^0}\sin\omega_i^0;$$

les ρ_i^0 et les ω_i^0 sont les valeurs initiales des ρ_i et des ω_i. En raisonnant comme au n° 69 on verrait que notre développement peut également se mettre sous la forme

$$(7) \qquad \sum \mu^\alpha A \rho_1^{0q_1}\rho_2^{0q_2}\rho_3^{0q_3}\rho_4^{0q_4}\cos\left(\nu t + \sum p_i\omega_i^0 + h\right),$$

où A et h dépendent seulement des L_i^0 et des λ_i^0 et où les entiers p et $2q$ satisfont aux conditions

$$2q_i \equiv p_i \pmod 2, \qquad 2q_i \geq p_i.$$

103. Coordonnées héliocentriques. — Nous avons vu au n° 64 comment les coordonnées x_1, x_2, x_3 d'une masse attirée par un centre fixe peuvent s'exprimer en fonction des éléments canoniques et nous pouvons appliquer les formules de ce n° 64 aux

deux planètes fictives A'' et B''. Nous verrons ainsi que

$$x'_1, \quad x'_2, \quad x'_3, \quad x'_4, \quad x'_5, \quad x'_6$$

sont développables suivant les puissances des ξ et des η, et que ce sont d'ailleurs des fonctions des L et des λ, qui restent holomorphes pour

$$L_i = L_i^0, \qquad \lambda_i = \lambda_i^0 + n_i t.$$

Si donc nous faisons

$$L_i = L_i^0 + \delta L_i, \qquad \lambda_i = \lambda_i^0 + n_i t + \delta\lambda_i,$$

ces coordonnées x' seront développables suivant les puissances des ξ, des η, des δL, des $\delta\lambda$. J'ajoute que les coefficients du développement sont de la forme $C\cos(\nu t + h)$, C et h étant des constantes qui dépendent seulement des L_i^0 et des λ_i^0. Ils sont donc de la forme (6). Comme les quantités ξ, η, δL, $\delta\lambda$ sont elles-mêmes développables sous la forme (6), il en sera de même des coordonnées x'.

En raisonnant comme au n° 69, on verrait alors que les x' peuvent également se développer sous la forme (7).

Ainsi nos coordonnées x' peuvent se développer soit sous la forme (6), soit sous la forme (7), et il en est de même des coordonnées héliocentriques des planètes $x_1 - x_7$, $x_2 - x_8$, $x_3 - x_9$; $x_4 - x_7$, $x_5 - x_8$, $x_6 - x_9$ qui sont des fonctions linéaires des x'.

104. Classification des termes. — Ainsi, soit dans les développements des éléments, soit dans ceux des coordonnées, le terme général est de la forme

$$\mu^\alpha A \mathfrak{M}_0 t^m \cos(\nu t + h).$$

Cela peut servir de base à une classification des termes; nous distinguerons d'abord les *termes périodiques*, les *termes séculaires purs*, et les *termes séculaires mixtes*.

Les termes périodiques seront ceux qui ne contiendront pas de facteur t^m où le temps t se trouve en dehors des signes sin et cos.

Les termes séculaires purs seront ceux qui contiendront un facteur t^m et ne contiendront pas de facteur trigonométrique

$$\cos(\nu t + h).$$

Les termes séculaires mixtes sont ceux qui contiennent à la fois un facteur t^m et un facteur trigonométrique.

Nous distinguerons ensuite les termes au point de vue de l'*ordre*, du *degré*, du *rang* et de la *classe*.

L'ordre d'un terme est l'exposant α qui affecte le paramètre μ. Ce qui justifie cette distinction, c'est la petitesse de ce paramètre, de telle façon que les termes sont d'autant plus petits qu'ils sont d'ordre plus élevé.

Le degré d'un terme est le degré du monome $\mathfrak{M}_0$; ce qui justifie cette distinction, c'est la petitesse des excentricités et des inclinaisons. Comme les ξ_i^0 et les η_i^0 sont de l'ordre des excentricités et des inclinaisons, les termes sont d'autant ples petits qu'ils sont de degré plus élevé.

Le rang sera

$$\alpha - m,$$

c'est-à-dire l'exposant α du paramètre μ, moins l'exposant m de t. On voit aisément, en effet, qu'un terme où $\alpha - m$ est petit peut avoir une grande importance bien que α soit grand; si, en effet, α et m sont grands tous deux, le terme d'abord très petit croîtra rapidement avec le temps.

Quant à la classe, elle dépend de la présence des petits diviseurs au dénominateur. Ces petits diviseurs sont introduits, comme on l'a vu, par les intégrations successives.

Soit alors m' l'exposant du petit diviseur qui figure au dénominateur, ou la somme des exposants des petits diviseurs qui figurent au dénominateur, si l'on a été amené à en considérer plusieurs. Nous avons vu, au nº 101, que cette dernière circonstance se présentera rarement.

Alors la classe d'un terme est, par définition,

$$\alpha - \frac{m}{2} - \frac{m'}{2}.$$

105. Invariabilité des grands axes. — Reprenons l'équation

$$L_i = L_i^0 + \mu \int_0^t \frac{dF_1}{d\lambda_i}\, dt$$

et supposons qu'on veuille procéder à la seconde approximation.

Pour cela, il faut substituer aux inconnues dans $\frac{dF_1}{d\lambda_i}$ leurs valeurs de première approximation. Or, nous avons F_1 qui est développable sous la forme

$$F_1 = \sum A \mathfrak{M} \cos(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + h),$$

la constante h étant d'ailleurs égale à zéro ou $\frac{\pi}{2}$. On en conclura

$$\frac{dF_1}{d\lambda_i} = -\sum A \mathfrak{M} k_i \sin(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + h).$$

Dans cette expression, il faut substituer, à la place des inconnues L_i, ξ_i, η_i, λ_i, les valeurs de première approximation

$$L_i^0, \quad \xi_i^0, \quad \eta_i^0, \qquad \lambda_i = \lambda_i^0 + n_i t.$$

Il vient ainsi

$$\frac{dF_1}{d\lambda_i} = -\sum A_0 \mathfrak{M}_0 k_i \sin(\nu t + h'),$$

où

$$\nu = k_1 n_1 + k_2 n_2,$$
$$h' = k_1\lambda_1^0 + k_2\lambda_2^0 + h,$$

où A_0 est ce que devient A quand on y remplace L_i par L_i^0, et $\mathfrak{M}_0$ ce que devient $\mathfrak{M}$ quand on y remplace ξ_i et η_i par ξ_i^0 et η_i^0.

Il vient ensuite par intégration

$$(8) \qquad L_i = L_i^0 + \mu \sum A_0 \mathfrak{M}_0 \frac{k_i}{\nu} [\cos(\nu t + h') - \cos h'].$$

On remarquera que dans la formule (8) figurent des termes périodiques, mais pas de termes séculaires. Un terme séculaire en t pourrait, en effet, s'introduire dans le cas où ν serait nul, c'est-à-dire dans le cas où la formule (1) deviendrait illusoire et où il faudrait recourir à la formule (3).

Mais nous avons supposé que le rapport des moyens mouvements $\frac{n_1}{n_2}$ est incommensurable. Alors ν ne peut s'annuler que si k_1 et k_2 s'annulent à la fois; mais alors k_i est nul et le terme correspondant disparaît.

Donc, si l'on s'en tient à la deuxième approximation, la plupart du temps suffisante dans la pratique, les développements des L_i

et, par conséquent, ceux des grands axes proportionnels aux L_i^2 ne contiendront pas de termes séculaires. Les grands axes exécuteront donc seulement de petites oscillations autour de leur valeur moyenne. C'est le théorème de Lagrange sur l'invariabilité des grands axes, si important au point de vue de la stabilité du système solaire.

Nous avons vu, au n° 99, que, en deuxième approximation, le développement de λ_i ne peut contenir de terme en t^2 que si celui de L_i contient des termes en t. Il n'en contiendra donc pas, si le rapport des moyens mouvements est incommensurable. C'est ce que nous avions annoncé au n° 99.

106. Théorème sur le rang. — On pourrait craindre que, dans certains termes, on ait $m > \alpha$, c'est-à-dire que le rang de ces termes ne soit négatif. Je me propose donc de démontrer les théorèmes suivants :

1° *Dans les développements de* ξ_i, η_i, $\delta\lambda_i$, L_i *il n'y a pas de termes de rang négatif.* J'ai dit $\delta\lambda_i$ et non λ_i, parce que dans λ_i nous avons le terme $n_i t$ qui est de rang négatif.

2° *Il n'y a pas de terme séculaire mixte de rang nul.* Le rang de ces termes est toujours au moins égal à *un*.

3° *Dans le développement de* L_i, *il n'y a pas de terme de rang nul.*

Ces théorèmes sont vrais à la deuxième approximation; en deuxième approximation, en effet, il n'y a que des termes trigonométriques ou des termes en t; il n'y a donc pas de terme séculaire mixte; les termes en t étant multipliés par μ sont de rang *zéro;* et, en vertu du théorème sur l'invariabilité des grands axes, il n'y a pas de terme en t dans les L_i.

Je dis maintenant que si les théorèmes sont vrais en $n^{\text{ième}}$ approximation, ils le seront encore en $(n+1)^{\text{ième}}$.

Reprenons, en effet, nos équations (5 *bis*) ou (14) et (15) du n° 97; et, en particulier, l'équation (15)

$$\alpha_i = \lambda_i^0 + \int_0^t \frac{dF_0}{dL_i}\,dt + \mu \int_0^t \frac{dF_1}{d\lambda_i}\,dt.$$

Je vais développer F_0 de la façon suivante, suivant les puissances

des δL_i.

$$F_0 = F_0^0 + n_1\,\delta L_1 + n_2\,\delta L_2 + \frac{1}{2}(C_{11}\,\delta L_1^2 + 2C_{12}\,\delta L_1\,\delta L_2 + C_{22}\,\delta L_2^2) + \Phi,$$

où Φ représente l'ensemble des termes de degré supérieur à *deux* en δL_1, δL_2.

Il est clair que F_0^0, n_1, n_2, C_{ik} sont des constantes ne dépendant que des L_i^0 : j'ajouterai même que $C_{12} = C_{21} = 0$, à cause de la forme particulière de la fonction F_0 qui est la somme d'une fonction de L_1^0 et d'une fonction de L_2^0, mais cette circonstance ne jouera aucun rôle dans les démonstrations qui vont suivre. On aura donc

$$\frac{dF_0}{dL_i} = n_i + \sum C_{ik}\,\delta L_k + \frac{d\Phi}{dL_i} = n_i - \mu \sum C_{ik} \int_0^t \frac{dF_1}{d\lambda_k}\,dt + \frac{d\Phi}{dL_i}.$$

Nos équations deviennent alors

$$(9)\quad \begin{cases} \delta L_i = -\mu \displaystyle\int_0^t \frac{dF_1}{d\lambda_i}\,dt, \quad \delta\xi_i = -\mu \int_0^t \frac{dF_1}{d\eta_i}\,dt, \quad \delta\eta_i = \mu \int_0^t \frac{dF_1}{d\xi_i}\,dt, \\ \delta\lambda_i = \mu \displaystyle\sum C_{ik} \int_0^t dt \int_0^t \frac{dF_1}{d\lambda_k}\,dt + \int_0^t \frac{d\Phi}{dL_i}\,dt + \mu \int_0^t \frac{dF_1}{dL_i}\,dt. \end{cases}$$

Dans les seconds membres de ces équations, il faut remplacer les inconnues par leurs valeurs de $n^{\text{ième}}$ approximation; je dis qu'on obtiendra ainsi les valeurs de $(n+1)^{\text{ième}}$ approximation des δL_i, $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$, $\delta\lambda_i$. Pour les δL_i, $\delta\xi_i$ et $\delta\eta_i$, je n'ai rien à ajouter à ce qui précède puisque je n'ai rien changé aux trois premières équations; mais il est nécessaire de revenir sur les $\delta\lambda_i$.

Si nous remplaçons les inconnues par leurs valeurs de $n^{\text{ième}}$ approximation, où l'erreur est de l'ordre de μ^n, on commettra sur les dérivées de F_1 une erreur de l'ordre de μ^n, et par conséquent sur $\mu \int \frac{dF_1}{dL_i}\,dt$ et sur $\mu \int\int \frac{dF_1}{d\lambda_k}\,dt$ une erreur de l'ordre de μ^{n+1}. Il reste à étudier le terme

$$\int_0^t \frac{d\Phi}{dL_i}\,dt.$$

La dérivée $\frac{d\Phi}{dL_i}$ ne contient que des termes d'ordre *deux* au moins par rapport aux δL. Remarquons que les δL sont divisibles par μ.

Or, soient x, y, z trois fonctions dont les développements, suivant les puissances de μ, soient divisibles par μ. Soient x', y', z' des développements approchés de x, y, z, où le premier terme erroné soit en μ^n, de telle sorte que les différences $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$ soient de l'ordre de μ^n. Je dis que les différences $xy - x'y'$, $xyz - x'y'z'$ seront divisibles par μ^{n+1}, c'est-à-dire que, si dans les produits xy, xyz on remplace x, y, z par leurs développements approchés x', y', z', l'erreur commise est de l'ordre de μ^{n+1}.

On a, en effet,

$$xy - x'y' = x(y - y') + y'(x - x'),$$
$$xyz - x'y'z' = xy(z - z') + xz'(y - y') + y'z'(x - x')$$

et, par hypothèse, $x - x'$ et $y - y'$ sont divisibles par μ^n, tandis que x et y' sont divisibles par μ.

Le théorème s'étendrait évidemment *a fortiori* à un produit d'un nombre quelconque de facteurs.

Si donc dans un monome entier par rapport aux δL, *pourvu que ce monome soit du second degré au moins,* nous substituons aux δL leurs valeurs de $n^{\text{ième}}$ approximation, l'erreur commise sera de l'ordre de μ^{n+1}.

Or, $\frac{d\Phi}{dL_i}$ ne contient que des termes du second degré au moins par rapport aux δL. Donc l'erreur commise sur le terme

$$\int_0^t \frac{d\Phi}{dL_i}\,dt$$

est de l'ordre de μ^{n+1}. C. Q. F. D.

Cela posé, j'observe que le produit de deux termes de rang positif sera une somme de termes de rang positif, que le produit de deux termes de rang positif ou nul sera une somme de termes de rang positif ou nul.

Si donc dans une fonction développable suivant les puissances des δL, $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\alpha$ on substitue à la place des δL, $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\lambda$ des développements ne contenant que des termes de rang positif (ou bien positif ou nul), on obtiendra un développement ne contenant que des termes de rang positif (ou bien positif ou nul).

Si donc on substitue aux δL, $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\lambda$ leurs valeurs de $n^{\text{ième}}$ approximation, qui, par hypothèse, ne contiennent pas de terme

de rang négatif, on obtiendra pour les dérivées de F_1 des développements où ne figureront que des termes de rang positif ou nul.

En intégrant par rapport à t, on peut diminuer le rang d'une unité, parce que l'application de la formule (3) peut introduire un facteur t. En revanche, en multipliant par μ, on augmente le rang d'une unité. Il résulte de là que les expressions telles que

$$(10) \qquad \mu \int_0^t \frac{dF_1}{d\xi_i} dt$$

ne contiendront non plus que des termes de rang positif ou nul.

Je dis de plus qu'elles ne pourront pas contenir de termes séculaires mixtes de rang nul. En effet, les termes de rang nul de l'expression (10) correspondent à des termes de rang négatif dans l'intégrale

$$\int \frac{dF_1}{d\xi_i} dt$$

et comme $\frac{dF_1}{d\xi_i}$ ne contient que des termes de rang positif ou nul, l'intégrale ne pourrait en contenir que par l'effet de l'application de la formule (3); or l'application de cette formule ne peut introduire que des termes séculaires purs.

En résumé, nous pouvons d'abord conclure qu'en $(n+1)^{\text{ième}}$ approximation,

$$\delta L_i, \quad \delta\xi_i, \quad \delta\eta_i$$

ne contiennent que des termes de rang positif ou nul et pas de de termes séculaires mixtes de rang nul.

Je dis maintenant que

$$\delta L_i = -\mu \int_0^t \frac{dF_1}{d\lambda_i} dt$$

ne pourra contenir de terme de rang nul.

D'après le n° 100, on aura

$$\frac{dF_1}{d\lambda_i} = \sum B \mathfrak{M}',$$

où $\mathfrak{M}'$ est un monome entier par rapport aux δL, $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\lambda$ et l'on doit y substituer les valeurs de $n^{\text{ième}}$ approximation de ces quantités.

Quant à B, c'est une des dérivées partielles de $\frac{dF_1}{d\lambda_i}$ et l'on doit y substituer aux inconnues leurs valeurs de première approximation

$$L_i^0, \quad \xi_i^0, \quad \eta_i^0, \quad n_i t + \lambda_i^0.$$

Cette dérivée partielle de $\frac{dF_1}{d\lambda_i}$, étant aussi une dérivée partielle de F_1, sera, comme nous l'avons dit au n° 100, de la forme

$$\sum A \cos(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + h)\mathfrak{M}.$$

Mais k_i ne pourra être nul; car les termes où k_i serait nul disparaîtraient quand on différentierait par rapport à λ_i et, par conséquent, ne pourraient exister ni dans $\frac{dF_1}{d\lambda_i}$, ni dans ses dérivées.

Si, comme nous l'avons dit, nous substituons aux inconnues leurs valeurs approchées, il arrive, comme au n° 100, que $A\mathfrak{M}$ se réduit à une constante C et $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + h$ à $\nu t + h'$: on a donc

$$B = \sum C \cos(\nu t + h'),$$

où

$$\nu = k_1 n_1 + k_2 n_2,$$

et, comme k_i n'est pas nul, ν *ne peut pas être nul*.

Cherchons si $\mathfrak{M}'$ peut contenir des termes de rang nul. Le monome $\mathfrak{M}'$ est le produit d'un certain nombre de facteurs δL, $\delta\lambda$, $\delta\xi$, $\delta\eta$; et l'on obtiendra les termes de rang nul de $\mathfrak{M}'$ en réduisant chacun des facteurs du produit à ses termes de rang nul.

Si, en effet, nous prenions dans l'un des facteurs un terme de rang positif, comme ce terme devrait être multiplié par d'autres termes provenant des autres facteurs et dont le rang serait positif ou nul, cela donnerait dans le produit un terme de rang positif.

Or, dans chacun des facteurs, les termes de rang nul sont séculaires purs. De plus, le produit de plusieurs termes séculaires purs est évidemment encore un terme séculaire pur. Donc, dans le produit $\mathfrak{M}'$, tous les termes de rang nul seront séculaires purs.

Comme tous les termes de B contiennent un facteur trigonométrique $\cos(\nu t + h')$ où ν n'est pas nul, tous les termes de rang nul de $B\mathfrak{M}'$ seront périodiques ou séculaires mixtes. Il en sera

donc encore de même pour les termes de rang nul de $\sum B\mathfrak{M}'$ ou $\frac{dF_1}{d\lambda_i}$.

Pour intégrer un terme périodique, ou séculaire mixte, il faut appliquer la formule (1) ou la formule (2), ce qui ne diminue pas le rang. Donc dans

$$\int \frac{dF_1}{d\lambda_i} dt$$

il n'y aura que des termes de rang nul ou positif. En multipliant par μ, on augmentera le rang d'une unité.

Donc, dans δL_i, il n'y a que des termes dont le rang est au moins égal à *un*. C. Q. F. D.

Ce résultat peut être regardé comme une généralisation du théorème sur l'invariabilité des grands axes.

Passons maintenant à $\delta\lambda_i$ et à la quatrième équation (9); dans le second membre de cette équation, il y a trois termes que nous considérerons successivement. Commençons par le troisième qui est de même forme que les seconds membres des trois premières équations (9). On verrait, comme pour ces trois premières équations, que ce terme ne peut donner ni terme de rang négatif, ni terme séculaire mixte de rang nul.

Passons au second terme

$$\int \frac{d\Phi}{dL_i} dt.$$

D'abord $\frac{d\Phi}{dL_i}$ ne contient que des termes du second degré au moins par rapport aux δL; les δL ne contiennent que des termes de rang *un* au moins; un produit d'au moins deux facteurs δL ne pourra contenir que des termes de rang *deux* au moins. Par l'intégration, le rang peut diminuer d'une unité, mais il reste au moins égal à 1. Donc pas de terme de rang négatif, ni de terme séculaire mixte de rang nul.

Passons au premier terme

$$\mu \sum C_{ik} \int\int \frac{dF_1}{d\lambda_k} dt.$$

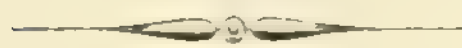
Nous avons vu que dans $\frac{dF_1}{d\lambda_k}$ tous les termes de rang nul sont

périodiques ou séculaires mixtes. Une double intégration ne changera pas leur rang puisqu'il faudra appliquer les formules (1) ou (2); ce rang restera donc nul et, quand on aura multiplié par μ, il deviendra égal à 1.

Pour les autres termes, leur rang est au moins égal à 1. S'ils sont périodiques ou séculaires mixtes, la double intégration ne changera pas leur rang et, après multiplication par μ, ce rang sera au moins égal à 2. S'ils sont séculaires purs, la double intégration diminuera le rang de 2 et la multiplication par μ l'augmentera de 1, de sorte que finalement ce rang sera au moins égal à 0. Ils resteront d'ailleurs séculaires purs.

Ainsi, pas de terme de rang négatif, pas de terme séculaire mixte de rang nul.

Donc la valeur de $(n+1)^{\text{ième}}$ approximation de $\delta\lambda_i$ ne contient ni terme de rang négatif, ni terme de rang séculaire mixte de rang nul. C. Q. F. D.



CHAPITRE VI.

TRANSFORMATIONS DIVERSES DES DÉVELOPPEMENTS.

107. Lemmes divers. — Pour aller plus loin, je vais m'appuyer sur une série de lemmes qui, au premier abord, paraîtront presque évidents, mais sur lesquels pourtant ils est nécessaire de donner quelques explications, parce que j'en ferai un fréquent usage.

Soit

$$\varphi(t) = \sum A \cos \nu t + \sum B \sin \nu t$$

une somme de termes trigonométriques. Je supposerai d'abord que le nombre des termes est fini.

Je dis que, si $\varphi(t)$ est nul pour toutes les valeurs de t, tous les coefficients A *et* B *sont nuls.*

Je suppose bien entendu que tous les termes semblables (c'est-à-dire ceux qui contiennent un même facteur $\cos \nu t$ ou $\sin \nu t$) ont été réunis en un seul.

Soit en effet $A' \cos \nu' t$ l'un des termes du second membre. On aura

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\int_0^t \varphi(t)\cos \nu' t\, dt = \frac{A'}{2} + \frac{A'}{4\nu'}\,\frac{\sin 2\nu' t}{t} &+ \sum \frac{A}{2t}\left[\frac{\sin(\nu+\nu')t}{\nu+\nu'} + \frac{\sin(\nu-\nu')t}{\nu-\nu'}\right] \\ &+ \sum \frac{B}{2t}\left[\frac{\sin^2(\nu+\nu')\frac{t}{2}}{\nu+\nu'} + \frac{\sin^2(\nu-\nu')\frac{t}{2}}{\nu-\nu'}\right].\end{aligned}$$

Il va sans dire que, sous le premier signe $\sum$, on doit prendre tous les termes, sauf celui où $\nu = \nu'$.

Faisons maintenant croître t indéfiniment; le premier terme $\frac{A'}{2}$ est constant, les autres tendent vers zéro, car on a t au dénominateur et l'on a au numérateur des lignes trigonométriques qui restent finies. Donc

$$\lim \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(t)\, dt = \frac{A'}{2}$$

et si $\varphi(t) = 0$, on aura

$$A' = 0.$$

Ainsi tous les A sont nuls, et l'on démontrerait de même que tous les B sont nuls.

Je suppose que

$$\nu = k_1 n_1 + k_2 n_2,$$

n_1 et n_2 étant incommensurables entre eux, k_1 et k_2 étant des entiers.

Introduisons deux variables indépendantes w_1 et w_2 et posons

$$f(w_1, w_2) = \sum A \cos(k_1 w_1 + k_2 w_2) + \sum B \sin(k_1 w_1 + k_2 w_2),$$

Quand on fera $w_1 = n_1 t$, $w_2 = n_2 t$, on verra $k_1 w_1 + k_2 w_2$ se réduire à νt et $f(w_1, w_2)$ à $\varphi(t)$. On a donc

$$f(n_1 t, n_2 t) = \varphi(t).$$

Si nous supposons comme plus haut que $\varphi(t)$ est nul pour toutes les valeurs de t, les coefficients A *et* B *seront tous nuls et par conséquent $f(w_1, w_2)$ sera identiquement nulle.*

On peut également conclure que, si $f(w_1, w_2)$ est une fonction quelconque de la forme que nous venons d'envisager, et si $f(n_1 t, n_2 t) = 0$, $f(w_1, w_2)$ sera identiquement nul; mais ici il est nécessaire de supposer que n_1 et n_2 sont incommensurables entre eux, sans quoi deux termes distincts de $f(w_1, w_2)$ pourraient donner dans $f(n_1 t, n_2 t)$ deux termes contenant un même facteur $\cos \nu t$ et qui pourraient se détruire mutuellement.

J'ai supposé jusqu'à présent que le nombre des termes était fini: il serait aisé d'étendre le résultat à une série convergente, pourvu que la convergence soit absolue et uniforme. Mais les séries de la

Mécanique céleste possèdent-elles une semblable convergence? Non, en général, elles ne convergent que si les termes sont groupés et ordonnés d'une façon convenable. Il serait donc nécessaire d'entrer dans une discussion approfondie des questions de convergence, questions que je désire laisser de côté dans cet Ouvrage.

Aussi aborderai-je la question par une tout autre face. Je suppose que $\varphi(t)$ soit obtenu par une suite d'approximations successives; que le nombre des termes, fini à chaque approximation, aille en croissant d'une approximation à la suivante et croisse ainsi indéfiniment. Soient $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., $\varphi_n(t)$, ... les valeurs approchées obtenues successivement pour $\varphi(t)$. Je suppose que $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$, ..., $\varphi_n(t)$ soient nulles pour toutes les valeurs de t, de sorte qu'*à chaque approximation,* $\varphi(t)$ satisfasse à la condition d'être identiquement nulle. Alors il est clair que tous les coefficients de $\varphi_1(t)$, de $\varphi_2(t)$, ..., de $\varphi_n(t)$, ... seront nuls et par conséquent aussi ceux de $\varphi(t)$. Le lemme est donc vrai à quelque approximation que je m'arrête.

Voilà dans quelles conditions nous appliquerons notre lemme à nos séries; si en effet le développement de μF_1 contient un nombre infini de termes, il est évident que, dans la pratique, on ne prendra qu'un nombre fini de ces termes, de sorte que les développements qu'on en déduira n'auront non plus qu'un nombre fini de termes. Plus on prendra de termes dans μF_1, plus on en aura dans les autres développements, et plus seront exactes les valeurs que l'on obtiendra pour les éléments canoniques et les coordonnées. Il nous suffit que notre lemme soit applicable à chaque approximation. C'est cette circonstance qui nous permettra d'appliquer nos lemmes aux séries de la Mécanique céleste. En résumé, nous pourrons les appliquer parce que nous pourrons toujours supposer μF_1 réduit à un nombre fini de termes.

Soit maintenant

$$\varphi(t) = \sum A t^m \cos \nu t + \sum B t^m \sin \nu t$$

une suite de termes. Je suppose que l'exposant entier m ne dépasse pas une certaine valeur.

Je dis encore que, si $\varphi(t)$ est nul quel que soit t, tous les termes sont nuls.

Soit en effet p la plus grande valeur de l'exposant m, je dis que tous les termes en t^p sont nuls. Car, si

$$A' t^p \cos \nu' t$$

est l'un de ces termes, on voit comme tout à l'heure que, pour $t = \infty$,

$$\lim \frac{1}{t^{p+1}} \int_0^t \varphi(t) \cos \nu' \, dt = \frac{A'}{2(p+1)}.$$

Donc A' est nul si $\varphi(t) = 0$.

Il n'y a donc pas de terme en t^p; et comme maintenant la plus grande valeur possible de l'exposant est $p-1$, on démontrera de la même manière qu'il n'y a pas de terme en t^{p-1}, et ainsi de suite.

Supposons

$$\nu = k_1 n_1 + k_2 n_2$$

et posons

$$f(\tau, w_1, w_2) = \sum A \tau^m \cos(k_1 w_1 + k_2 w_2) + \sum B \tau^m \sin(k_1 w_1 + k_2 w_2),$$

de sorte que

$$f(t, n_1 t, n_2 t) = \varphi(t).$$

Si $\varphi(t)$ est nul quel que soit t, tous les coefficients seront nuls et $f(\tau, w_1, w_2)$ sera nul quels que soient τ et les w.

Soit maintenant

$$\varphi(\mu, t) = \sum A \mu^\alpha t^m \cos \nu t + \sum B \mu^\alpha t^m \sin \nu t.$$

Je suppose que l'exposant m ne puisse dépasser α, c'est-à-dire, pour employer le langage des numéros précédents, qu'il n'y ait pas de terme de rang négatif. Je supposerai d'ailleurs que $\varphi(\mu, t)$ contient un nombre infini de termes; mais qu'il n'y en ait qu'un nombre contenant en facteur une même puissance de μ; de telle façon que le coefficient de μ^α se compose d'un nombre fini de termes.

Je pose de même

$$f(\mu, \tau, w_1, w_2) = \sum A \mu^\alpha \tau^m \cos(k_1 w_1 + k_2 w_2)$$
$$+ \sum B^\alpha \tau^m \sin(k_1 w_1 + k_2 w_2).$$

Si $\varphi(\mu, t)$ est nul quels que soient μ et t, le coefficient de μ^α devra être nul quel que soit t; dans ce coefficient, l'exposant m est limité puisqu'il ne peut dépasser α; nous pouvons donc appliquer le terme précédent et conclure que $f(\mu, \tau, w_1\, w_2)$ est nul quels que soient μ, τ, w_1 et w_2. Je pourrais dire aussi, *mais pourvu que $\frac{n_1}{n_2}$ soit incommensurable,* qu'une fonction de la forme précédente

$$f(\mu, \tau, w_1, w_2)$$

est identiquement nulle si

$$f(\mu, t, n_1 t, n_2 t) = 0.$$

108. Transformation des développements. — Nous avons trouvé au n° **102** pour les éléments canoniques des développements de la forme

$$\sum \mu^\alpha A t^m \cos(\nu t + h) M_0,$$

où

$$m \leq \alpha, \qquad \nu = k_1 n_1 + k_2 n_2.$$

Considérons l'un quelconque des éléments canoniques, par exemple L_i, et soit

$$L_i = \sum \mu^\alpha A t^m \cos(\nu t + h) M_0,$$

et soit ensuite

(11) $$L_i^\star = \sum \mu^\alpha A \tau^m \cos(k_1 w_1 + k_2 w_2 + h) M_0$$

une fonction de trois variables τ, w_1, w_2. Il est clair que, si l'on fait

$$\tau = t, \qquad w_1 = n_1 t, \qquad w_2 = n_2 t,$$

$k_1 w_1 + k_2 w_2$ se réduira à νt et $L_i^\star$ à L_i. On aura donc

$$L_i^\star(t, n_1 t, n_2 t) = L_i.$$

On définirait de même $\xi_i^\star$, $\eta_i^\star$, $\delta\lambda_i^\star$.

Je dis $\delta\lambda_i^\star$ et non $\lambda_i^\star$, à cause du terme en $n_i t$ qui figure dans λ_i; on doit, en effet, prendre non pas

$$\lambda_i^\star = n_i \tau + \lambda_i^0 + \delta\lambda_i^\star,$$

mais bien

$$\lambda_i^\star = w_i + \lambda_i^0 + \delta\lambda_i^\star.$$

On voit, de plus, que

$$\frac{dL_i^\star}{d\tau} + n_1\frac{dL_i^\star}{dw_1} + n_2\frac{dL_i^\star}{dw_2}$$

se réduit à $\frac{dL_i}{dt}$ pour

$$\tau = t, \qquad w_1 = n_1 t, \qquad w_2 = n_2 t.$$

Il est clair que les dérivées de $\xi_i^\star$, $\eta_i^\star$, $\lambda_i^\star$ jouissent de la même propriété.

Soit $F^\star$ ce que devient F, quand on y remplace L_i, λ_i, ξ_i, η_i par $L_i^\star$, $\lambda_i^\star$, $\xi_i^\star$, $\eta_i^\star$. Si alors dans la dérivée partielle

$$\frac{dF^\star}{d\lambda_i^\star}$$

on remplace $L_i^\star$, $\lambda_i^\star$, $\xi_i^\star$, $\eta_i^\star$ par L_i, λ_i, ξ_i, η_i, cette dérivée se réduira à

$$\frac{dF}{d\lambda_i}.$$

Si, dans $\frac{dF^\star}{d\lambda_i^\star}$ nous remplaçons les variables $L_i^\star$, ... par leur développement (11), on obtiendra pour $\frac{dF^\star}{d\lambda_i^\star}$ un développement de même forme :

$$\frac{dF^\star}{d\lambda_i^\star} = \sum \lambda^\alpha A'\tau^m \cos(k_1 w_1 + k_2 w_2 + h')\mathfrak{M}'_0. \tag{11 bis}$$

Si, dans ce développement (11 *bis*), on remplace τ, w_1, w_2 par t, $n_1 t$, $n_2 t$, c'est comme si l'on remplaçait $L_i^\star$, ..., par L_i, ...; et $\frac{dF^\star}{d\lambda_i^\star}$ se réduira à $\frac{dF}{d\lambda_i}$; nous aurons donc

$$\frac{dF}{d\lambda_i} = \sum \mu^\alpha A' t^m \cos(\nu t + h')\mathfrak{M}'_0.$$

Envisageons l'équation

$$\frac{dL_i^\star}{d\tau} + n_1\frac{dL_i^\star}{dw_1} + n_2\frac{dL_i^\star}{dw_2} + \frac{dF^\star}{d\lambda_i^\star} = 0. \tag{12}$$

Le premier membre de cette équation est développable sous la

forme

$$\sum \mu^\alpha A \tau^m \cos(k_1 w_1 + k_2 w_2 + h) \mathfrak{M}_0,$$

puisqu'il en est ainsi de $L_i^\star$, de ses dérivées et de $\frac{dF^\star}{d\lambda_i^\star}$. Pour

$$\tau = t, \qquad w_1 = n_1 t, \qquad w_2 = n_2 t,$$

ce premier membre se réduit à

$$\frac{dL_i}{dt} + \frac{dF}{d\lambda_i},$$

il est donc nul, en vertu de l'équation (5) du n° 79.

Donc, en vertu des lemmes du n° 107, il sera identiquement nul, quels que soient τ, w_1 et w_2.

On démontrerait de même les équations

$$(12\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\xi_i^\star}{d\tau} + n_1 \frac{d\xi_i^\star}{dw_1} + n_2 \frac{d\xi_i^\star}{dw_2} + \frac{dF^\star}{d\eta_i^\star} = 0,\\ &\frac{d\lambda_i^\star}{d\tau} + n_1 \frac{d\lambda_i^\star}{dw_1} + n_2 \frac{d\lambda_i^\star}{dw_2} - \frac{dF^\star}{dL_i^\star} = 0,\\ &\frac{d\eta_i^\star}{d\tau} + n_1 \frac{d\eta_i^\star}{dw_1} + n_2 \frac{d\eta_i^\star}{dw_2} - \frac{dF^\star}{d\xi_i^\star} = 0.\end{aligned}\right.$$

Si, maintenant, nous posons

$$\tau = t + c, \qquad w_1 = n_1 t + \varepsilon_1, \qquad w_2 = n_2 t + \varepsilon_2,$$

c, ε_1 et ε_2 étant des constantes quelconques, nous aurons encore

$$\frac{dL_i^\star}{dt} = \frac{dL_i^\star}{d\tau} + n_1 \frac{dL_i^\star}{dw_1} + n_2 \frac{dL_i^\star}{dw_2}$$

et l'équation (12) deviendra

$$\frac{dL_i^\star}{dt} = -\frac{dF^\star}{d\lambda_i^\star},$$

ou, en supprimant les astériques devenues inutiles,

$$\frac{dL_i}{dt} = -\frac{dF}{d\lambda_i}.$$

Les équations (12 *bis*) nous donneront de même

$$\frac{d\xi_i}{dt} = -\frac{dF}{d\eta_i}, \qquad \frac{d\lambda_i}{dt} = \frac{dF}{dL_i}, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = \frac{dF}{d\xi_i}.$$

Ce sont là les équations (5) du n° 79.

Ainsi donc, *si nos développements* (11) *satisfont aux équations du mouvement, c'est-à-dire aux équations* (5) *du n°* 79, *quand on y fait*

$$\tau = t, \quad w_1 = n_1 t, \quad w_2 = n_2 t,$$

ils y satisferont encore quand on y fera

$$\tau = t + c, \quad w_1 = n_1 t + \varepsilon_1, \quad w_2 = n_2 t + \varepsilon_2,$$

quelles que soient les valeurs des constantes c *et* ε.

Comment avions-nous le droit d'appliquer notre lemme comme nous l'avons fait ? Il est vrai que F contient une infinité de termes, mais, dans la pratique, nous n'en prendrons jamais qu'un nombre fini. Plus nous voudrons d'exactitude, plus nous en prendrons, mais nous n'en aurons jamais qu'un nombre fini ; nous pouvons donc raisonner comme si F ne contenait qu'un nombre fini de termes ; nous obtiendrons alors pour les $L_i^\star$, ..., des développements de la forme (11) ; seulement, dans ces développements, le coefficient de μ^α ne contiendra qu'un nombre fini de termes, ce qui est, comme nous l'avons vu, la condition pour que le troisième lemme du n° 107 soit applicable dans F (*vide infra* n° 130).

109. D'ailleurs, les équations (12) et (12 *bis*) peuvent se démontrer sans le secours des lemmes du n° 107. Je dis que l'on pourra trouver pour les inconnues

$$L_i^\star, \quad \xi_i^\star, \quad \eta_i^\star, \quad \lambda_i^\star - w_i$$

des développements de la forme (11) qui satisfassent aux équations (12) et (12 *bis*) et qui se réduisent à

$$L_i^0, \quad \xi_i^0, \quad \eta_i^0, \quad \lambda_i^0$$

pour

$$\tau = w_1 = w_2 = 0.$$

Nous aurons, en effet, en première approximation, c'est-à-dire en négligeant μ et en réduisant F à F_0,

$$L_i^\star = L_i^0, \quad \xi_i^\star = \xi_i^0, \quad \eta_i^\star = \eta_i^0, \quad \lambda_i^\star = w_i + \lambda_i^0.$$

Supposons que nous ayons obtenu pour nos inconnues des valeurs de $n^{\text{ième}}$ approximation, où l'erreur soit de l'ordre de μ^n ;

comment obtiendrons-nous des valeurs où l'erreur soit de l'ordre de μ^{n+1} ?

Dans les dérivées de $F^\star$, dans l'équation (12), ainsi que dans la première et la dernière équation (12 *bis*), substituons à la place des inconnues leurs valeurs de $n^{\text{ième}}$ approximation. Après cette substitution, ces dérivées de $F^\star$ sont développées sous la forme (11), de sorte que l'équation (12), par exemple, s'écrit

$$(13)\qquad \frac{dL_i^\star}{d\tau} + n_1 \frac{dL_i^\star}{dw_1} + n_2 \frac{dL_i^\star}{dw_2} = \sum B\tau^m \cos(k_1 w_1 + k_2 w_2 + h),$$

et l'on en tire aisément la valeur de $L_i^\star$; on trouve

$$(14)\qquad L_i^\star = L_i^0 + \sum C.$$

A chaque terme du second membre de (13) correspond dans (14) un terme que je désigne pour abréger par C et dont voici la valeur :

1° A un terme

$$B\tau^m$$

dans (13) correspondra dans (14) un terme

$$C = \frac{B\tau^{m+1}}{m+1}.$$

2° Au terme

$$B\cos(k_1 w_1 + k_2 w_2 + h)$$

correspondra

$$C = C_0 + B\frac{\sin(k_1 w_1 + k_2 w_2 + h) - \sin h}{k_1 n_1 + k_2 n_2}.$$

3° Au terme

$$B\tau\cos(k_1 w_1 + k_2 w_2 + h)$$

correspondra

$$C = B\tau\frac{\sin(k_1 w_1 + k_2 w_2 + h)}{k_1 n_1 + k_2 n_2} + B\frac{\cos(k_1 w_1 + k_2 w_2 + h) - \cos h}{(k_1 n_1 + k_2 n_2)^2}.$$

4° Plus généralement, soit C_m le terme de (14) qui correspond à

$$B\tau^m \cos(k_1 w_1 + k_2 w_2 + h).$$

de sorte que

$$\frac{dC_m}{d\tau} + n_1 \frac{dC_m}{dw_1} + n_2 \frac{dC_m}{dw_2} = B\tau^m \cos(k_1 w_1 + k_2 w_2 + h)$$

et que $C_m = 0$ pour $\tau = w_1 = w_2 = 0$.

On aura la formule de récurrence

$$(15) \qquad C_m = \frac{B\tau^m \sin(k_1 w_1 + k_2 w_2 + h)}{k_1 n_1 + k_2 n_2} + \frac{m}{k_1 n_1 + k_2 n_2} \frac{dC_{m-1}}{dh}.$$

Si, en effet, nous posons pour abréger

$$k_1 w_1 + k_2 w_2 + h = \varphi, \qquad k_1 n_1 + k_2 n_2 = \nu$$

et

$$\frac{d}{d\tau} + n_1 \frac{d}{dw_1} + n_2 \frac{d}{dw_2} = \Delta,$$

il viendra

$$\Delta C_m = B\tau^m \cos\varphi, \qquad \Delta C_{m-1} = B\tau^{m-1} \cos\varphi$$

et, en différentiant cette dernière par rapport à h,

$$\Delta \frac{dC_{m-1}}{dh} = -B\tau^{m-1} \sin\varphi.$$

D'ailleurs

$$\Delta(B\tau^m \sin\varphi) = \nu B\tau^m \cos\varphi + mB\tau^{m-1} \sin\varphi$$

et, par conséquent,

$$\Delta\left(\frac{B\tau^m \sin\varphi}{\nu} + \frac{m}{\nu} \frac{dC_{m-1}}{dh}\right) = B\tau^m \cos\varphi.$$

Il reste à démontrer que l'expression

$$\frac{B\tau^m \sin\varphi}{\nu} + \frac{m}{\nu} \frac{dC_{m-1}}{dh}$$

s'annule pour

$$\tau = w_1 = w_2 = 0.$$

En effet, le premier terme s'annule parce qu'il contient τ en facteur; d'autre part, C_{m-1} s'annule par définition et cela quel que soit h; il en est donc de même de $\frac{dC_{m-1}}{dh}$ et du second terme.

La formule (15) est donc démontrée et elle nous permettra de calculer C_m, puisque nous avons plus haut calculé C_0. Cette formule peut remplacer la formule (2) du n° 98.

Nous pouvons donc calculer L_i^* en partant de l'équation (12) (on traiterait de même la première et la dernière équation (12 *bis*). On démontrerait comme au n° 95 que l'erreur commise sur ces nouvelles valeurs de $(n+1)^{\text{ième}}$ approximation des inconnues L_i^*, ξ_i^*, η_i^* est de l'ordre de μ^{n+1}.

Prenons ensuite la seconde équation (12 *bis*); substituons-y, dans la dérivée de F^*, à la place des L_i^*, ξ_i^*, η_i^*, leurs valeurs de $(n+1)^{\text{ième}}$ approximation que nous venons de trouver et, à la place des λ_i^*, leurs valeurs de $n^{\text{ième}}$ approximation.

Traitons ensuite l'équation comme nous avons fait pour l'équation (13). Nous verrions, comme au n° 95, que la valeur de λ_i^* ainsi obtenue est exacte aux termes près de l'ordre de μ^{n+1}.

Nous obtiendrons donc par approximations successives des développements de nos inconnues, qui seront de la forme (11), satisferont aux équations (12) et (12 *bis*) et se réduiront à L_i^0, ξ_i^0, η_i^0, λ_i^0 pour $\tau = w_1 = w_2 = 0$.

Remplaçons-y τ par t, w_1 et w_2 par $n_1 t$ et $n_2 t$; nous aurons des développements qui satisferont aux équations (5) du n° 79; quand on y fera $t = 0$ (ce qui revient à faire $\tau = w_1 = w_2 = 0$), ces développements se réduiront bien à L_i^0, ξ_i^0, η_i^0, λ_i^0; ils sont donc identiques à ceux que nous avons trouvés au n° 100.

Nous voyons donc que si, dans les développements du n° 100, on substitue $k_1 w_1 + k_2 w_2$ à la place de νt, quand le temps est sous le signe cos et τ à la place de t quand t est en dehors du signe cos, on obtiendra des développements de la forme (11) qui satisferont aux équations (12) et (12 *bis*). C. Q. F. D.

On aura donc obtenu les résultats du n° 108 sans se servir des lemmes du n° 107. J'ai cru cependant devoir indiquer la première marche, non seulement parce que ces lemmes me seront encore utiles plus tard, mais surtout parce que l'on voit mieux ainsi comment on peut être conduit par une suite naturelle d'idées au théorème du n° 108.

110. Comparaison des développements. — Nous avons obtenu au n° 102 des développements de la forme

$$\sum \mu^\alpha A \mathfrak{M}_0 t^m \cos(\nu t + h)$$

qui dépendent de 12 constantes d'intégration, à savoir les deux L_i^0, les deux λ_i^0, les quatre ξ_i^0 et les quatre η_i^0.

Nous avons obtenu aux n°s 108 et 109 d'autres développements de la forme

$$\sum \eta_i^\alpha A \mathfrak{M}_0 \tau^m \cos(k_1 w_1 + k_2 w_2 + h),$$

où l'on doit faire

$$\tau = t + c, \qquad w_i = n_i t + \varepsilon_i,$$

c, ε_1 et ε_2 étant trois constantes d'intégration.

Ces développements nouveaux contiennent trois constantes arbitraires d'intégration de plus que les précédents. Comme nos équations différentielles forment un système du douzième ordre, trois de ces quinze constantes ne sont pas réellement distinctes des douze autres ; nous verrons plus tard le parti que l'on peut tirer de cette remarque.

Nous pourrions donc sans restreindre la généralité supposer $c = 0$. Il est à remarquer que si l'on adopte le développement (11), les constantes L_i^0, ξ_i^0, η_i^0 n'ont plus la même signification que dans le développement primitif.

En effet, pour $t = 0$, il n'arrive plus que

$$L_i, \quad \xi_i, \quad \eta_i, \quad \lambda_i$$

se réduisent à

$$L_i^0, \quad \xi_i^0, \quad \eta_i^0, \quad \varepsilon_i + \lambda_i^0.$$

Cela n'arriverait que si l'on supposait $c = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, parce que l'on retomberait alors sur le développement primitif. Seulement les différences entre L_i^0 et la valeur initiale de L_i, par exemple, sont de l'ordre de μ.

En raisonnant comme au n° 69, on verrait que l'on peut passer du développement (11) à un autre de la forme

$$(16) \quad \sum \mu^\alpha A (\rho_1^0)^{q_1} (\rho_2^0)^{q_2} (\rho_3^0)^{q_3} (\rho_4^0)^{q_4} \tau^m \cos\left(\sum kw + \sum p_i \omega_i^0 + h\right)$$

où l'on a, d'ailleurs,

$$2q_i \equiv p_i \pmod 2, \qquad 2q_i \geq |p_i|.$$

On verrait, d'ailleurs, comme au n° 103, que les coordonnées

héliocentriques peuvent également se développer soit sous la forme (11) soit sous la forme (16).

111. Symétrie. — Supposons que nous comparions deux systèmes de trois corps A, B, C et A_1, B_1, C_1; dans les deux systèmes les masses seront les mêmes. A l'origine du temps, les deux triangles ABC et $A_1B_1C_1$ sont symétriques par rapport au plan des x_1x_3; les vitesses initiales des points A_1, B_1, C_1 sont égales et directement opposées à trois vecteurs qui sont symétriques (par rapport à ce même plan) des trois vecteurs qui représentent les vitesses initiales des points A, B, C.

Dans ces conditions, il est clair que la position du triangle ABC au temps t sera symétrique de celle du triangle $A_1B_1C_1$ au temps $-t$.

Pour passer de la situation du système ABC au temps t à celle du système $A_1B_1C_1$ au temps $-t$, il suffit de changer

$$x'_1, \quad x'_2, \quad x'_3, \quad L_i, \quad \lambda_i, \quad \xi_i, \quad \eta_i, \quad \rho_i, \quad \omega_i \tag{17}$$

en

$$x'_1, \quad -x'_2, \quad x'_3, \quad L_i, \quad -\lambda_i, \quad \xi_i, \quad -\eta_i, \quad \rho_i, \quad -\omega_i. \tag{18}$$

Si donc nous changeons

$$L_i^0, \quad \lambda_i^0, \quad \xi_i^0, \quad \eta_i^0, \quad \rho_i^0, \quad \omega_i^0, \quad t$$

en

$$L_i^0, \quad -\lambda_i^0, \quad \xi_i^0, \quad -\eta_i^0, \quad \rho_i^0, \quad -\omega_i^0, \quad -t,$$

les quantités (17) devront se changer dans les quantités (18).

Prenons donc le développement (16) et supposons

$$c = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \lambda_i^0 = -\lambda_i^0 = 0,$$

et changeons-y t en $-t$, ω_i^0 en $-\omega_i^0$ et par conséquent τ en $-\tau$, w_i en $-w_i$.

Changeons en définitive le signe de τ et ceux des w et des ω^0. Les quantités (15) devront ou ne pas changer, ou bien changer de signe; leurs développements contiendront donc, ou bien rien que des cosinus, ou bien rien que des sinus. C'est-à-dire que la constante h devra être toujours égale à 0, ou à $-\frac{\pi}{2}$.

Elle sera égale à o, si m est pair et à $-\frac{\pi}{2}$ si m est impair dans les développements de

$$x'_1,\ x'_3,\ L_i,\ \xi_i,$$

et à $-\frac{\pi}{2}$ si m est pair et à o, si m est impair dans les développements de

$$x'_2,\ \lambda_i,\ \eta_i.$$

Si, au lieu de la forme (16), nous adoptons la forme (11), la constante h sera encore égale à o, ou à $-\frac{\pi}{2}$.

Elle sera égale à l'une ou à l'autre de ces quantités, suivant celle des inconnues (17) qu'il s'agit de développer, suivant la parité de l'exposant de τ, et celle des exposants des η_i^0 dans le monome $\mathfrak{M}_0$ (*cf.* n° 86). On remarquera que le résultat précédent suppose que les λ_i^0 sont nuls; nous pouvons faire cette hypothèse sans restreindre la généralité puisque avec nos trois constantes nouvelles c, ε_1, ε_2 nous avons encore une constante de trop, même avec l'hypothèse

$$\lambda_1^0 = \lambda_2^0 = o.$$

112. Faisons maintenant tourner tout le système d'un angle ε autour de l'axe des x_3; nos formules, indépendantes du choix des axes, devront conserver leur valeur. Or, cela revient à changer λ_i, λ_i^0 en $\lambda_i + \varepsilon$, $\lambda_i^0 + \varepsilon$, et ω_i^0 en $\omega_i^0 - \varepsilon$. Dans ces conditions L_i, x'_3 (et x'_6) ne changeront pas, λ_i se changera en $\lambda_i + \varepsilon$.

x'_1 et x'_2 se changeront en $x'_1 \cos\varepsilon - x'_2 \sin\varepsilon$ et $x'_1 \sin\varepsilon + x'_2 \cos\varepsilon$; x'_4 et x'_5 subiront une transformation analogue; ξ_i et η_i se changeront en $\xi_i \cos\varepsilon + \eta_i \sin\varepsilon$ et $-\xi_i \sin\varepsilon + \eta_i \cos\varepsilon$.

Dans ces conditions, voici quelle semblerait être la généralisation naturelle des théorèmes n°s 70 et 87 : supposons qu'on ait développé, par exemple, L_i^* sous la forme (16); il semblerait que l'on dût avoir

$$\sum k - \sum p = o.$$

Sous cette forme, le théorème serait faux.

113. Mais nous pouvons transformer nos développements de la

façon suivante. D'abord dans les développements (16) figurent deux constantes A et h qui dépendent non seulement des L_i^0, mais encore des λ_i^0. Il est clair que nos inconnues sont des fonctions périodiques des λ_i^0, et qu'il en est de même de $A \cos h$ et $A \sin h$. Car quand on augmente les λ_i^0, c'est-à-dire les valeurs initiales des longitudes λ_i, de multiples de 2π, nos inconnues $\delta L_i^\star$, $\delta \xi_i^\star$, $\delta \eta_i^\star$, $\delta \lambda_i^\star$ ne doivent pas changer. Donc $A \cos h$ et $A \sin h$ peuvent se développer suivant les sinus et les cosinus des multiples des λ_i^0, de sorte que nos développements (16) prendront la forme

$$(16\ bis)\quad \begin{cases} \sum \mu^\alpha A_0 (\rho_1^0)^{q_1} (\rho_2^0)^{q_2} (\rho_3^0)^{q_3} \\ \quad \times (\rho_4^0)^{q_4} \tau^m \cos\left(\sum k_i w_i + \sum k_i' \lambda_i^0 + \sum p_i \omega_i^0 + h_0\right), \end{cases}$$

A_0 et h_0 ne dépendant plus cette fois que des L_i^0. J'ajouterai que, d'après le n° 111, h_0 est une constante numérique multiple de $\frac{\pi}{2}$.

Il n'y a aucune raison pour que les $k_i = k_i'$. Mais nous voyons que l'on aura

$$\sum k' - \sum p = 0$$

dans les développements de $\delta L_i^\star$ et de $\delta \lambda_i^\star$ et

$$\sum k' - \sum p = \pm 1$$

dans ceux de $\delta \xi_i^\star$ et $\delta \eta_i^\star$. Et, en effet, si l'on change les valeurs initiales λ_i^0 et ω_i^0 en $\lambda_i^0 + \varepsilon$, $\lambda_i^0 - \varepsilon$, on vient de voir que $L_i^\star$ ne change pas, que $\lambda_i^\star$ se change en $\lambda_i^\star + \varepsilon$, $\xi_i^\star$ et $\eta_i^\star$ en $\xi_i^\star \cos \varepsilon + \eta_i^\star \sin \varepsilon$ et $-\xi_i^\star \sin \varepsilon + \eta_i^\star \cos \varepsilon$ (*cf.* n° 70).

Dans les développements (16 *bis*), nous avons pris pour constantes arbitraires les valeurs initiales L_i^0, λ_i^0, ξ_i^0 et η_i^0 de nos inconnues. Mais nous pourrions faire un autre choix.

Supposons que, dans les développements (16 *bis*), on supprime tous les termes qui dépendent de τ ou des w, et qu'on ne conserve que les termes constants. Soit L_i^1 ce qui restera du développement de $L_i^\star$ après cette suppression; alors L_i^1 ne sera autre chose que l'intégrale

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} L_i^\star \, dw_1 \, dw_2$$

pour $\tau = 0$; ce sera en quelque sorte la valeur moyenne de L_i^* pour $\tau = 0$.

On définira de même ξ_i^1 et η_i^1; quant à λ_i^1 ce sera de même ce qui reste du développement de λ_i^* après cette suppression, de sorte que

$$\lambda_i^1 - w_i = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\lambda_i^* - w_i)\, dw_1\, dw_2$$

pour $\tau = 0$.

On voit que L_i^1, λ_i^1, ξ_i^1, η_i^1 sont des fonctions des anciennes constantes L_i^0, λ_i^0, ξ_i^0, η_i^0 et du paramètre μ. Elles sont développables suivant les puissances de μ et, pour $\mu = 0$, on a simplement

$$L_i^1 = L_i^0, \qquad \lambda_i^1 = \lambda_i^0, \qquad \xi_i^1 = \xi_i^0, \qquad \eta_i^1 = \eta_i^0.$$

Quant aux différences $L_i^1 - L_i^0$, $\lambda_i^1 - \lambda_i^0$, $\xi_i^1 - \xi_i^0$, $\eta_i^1 - \eta_i^0$; elles sont développables suivant les puissances des ξ_i^0 et des η_i^0, et périodiques par rapport aux λ_i^0. Cela résulte immédiatement de la forme des développements (11), (16) et (16 *bis*).

Soient donc

$$(19) \qquad L_i^1 = L_i^0 + \sum \mu^\alpha A_0 \prod\nolimits_0 \cos\left(\sum k_i \lambda_i^0 + \sum p_i \omega_i^0 + a_0\right)$$

où $\prod_0$ est mis pour abréger pour le produit

$$(\rho_1^0)^{q_1} (\rho_2^0)^{q_2} (\rho_3^0)^{q_3} (\rho_4^0)^{q_4}.$$

Ce développement (19) se déduit, comme je l'ai dit, du développement (16 *bis*) en supprimant tous les termes dépendant des w ou de τ. Nous pourrions écrire aussi

$$(19\ bis) \qquad L_i^1 = L_i^0 + \sum \mu^\alpha A_0 \mathfrak{M}_0 \cos\left(\sum k_i \lambda_i^0 + h_0\right)$$

en partant des développements (11).

Nous aurons d'ailleurs d'autres équations (19 *bis*) de même forme pour définir λ_i^1, ξ_i^1, η_i^1.

De ces équations (19 *bis*) nous pouvons inversement tirer les L_i^0, λ_i^0, ξ_i^0, η_i^0 en fonction des L_i^1, λ_i^1, ξ_i^1, η_i^1. Alors L_i^0, λ_i^0, ξ_i^0, η_i^0 seraient développables suivant les puissances de μ et pour $\mu = 0$ se réduiraient respectivement à L_i^1, λ_i^1, ξ_i^1, η_i^1. De plus les différences $L_i^0 - L_i^1$, $\lambda_i^0 - \lambda_i^1$, $\xi_i^0 - \xi_i^1$, $\eta_i^0 - \eta_i^1$ seraient développables

suivant les puissances des ξ_i^1 et des η_i^1 et périodiques par rapport aux λ_i^1. Nous pourrions donc écrire

$$(20)\qquad L_i^0 = L_i^1 + \sum \mu^\alpha A_1 \mathfrak{M}'_1 \cos\left(\sum k'_i \lambda_i^1 + \sum p_i \omega_i^1 + h_1\right)$$

où A_1 et h_1 dépendent seulement des L_i^1 et où $\mathfrak{M}'_1$ est un monome entier par rapport aux ξ_i^1 et aux η_i^1; on aurait des développements analogues pour λ_i^0, ξ_i^0, η_i^0.

Reprenons donc les développements (11) et substituons-y à la place des L_i^0, λ_i^0, ξ_i^0, η_i^0 leurs valeurs (20). Il est clair que $\delta L_i^\star$, $\delta\lambda_i^\star$, $\delta\xi_i^\star$, $\delta\eta_i^\star$ seront développables suivant les puissances de μ, de τ, des ξ_i^1, des η_i^1 et périodiques par rapport aux w et aux λ_i^1; nous aurons donc

$$(21)\qquad L_i^\star = L_i^1 + \sum \mu^\alpha A_1 \mathfrak{M}_1 \tau^m \cos\left(\sum k_i w_i + \sum k'_i \lambda'_i + h_1\right)$$

où A_1 et h_1 dépendent seulement des L_i^1 et où $\mathfrak{M}_1$ est un monome entier par rapport aux ξ_i^1 et aux η_i^1. On aurait d'ailleurs d'autres développements de même forme pour $\lambda_i^\star$, $\xi_i^\star$, $\eta_i^\star$, avec cette différence que dans le développement de $\lambda_i^\star$, la partie indépendante de μ serait $w_i + \lambda_i^1$ et non pas simplement λ_i^1.

Si nous posons

$$\xi_i^1 = \sqrt{2\rho_i^1}\cos\omega_i^1, \qquad \eta_i^1 = \sqrt{2\rho_i^1}\sin\omega_i^1,$$

le développement (21), d'après le raisonnement du n° 69, prendra la forme

$$(22)\qquad \begin{cases} L_i^\star = L_i^1 + \sum \mu^\alpha A_1 (\rho_1^1)^{q_1} (\rho_2^1)^{q_2} (\rho_3^1)^{q_3} \\ \qquad \times (\rho_4^1)^{q_4} \tau^m \cos\left(\sum k_i w_i + \sum k'_i \lambda_i^1 + \sum p_i \omega_i^1 + h_i\right), \end{cases}$$

où nous aurons toujours les mêmes relations entre les entiers p et $2q$.

Les développements (21) *diffèrent donc des développements* (22) *en que l'on a pris pour constantes d'intégration non pas les valeurs initiales, mais les valeurs moyennes des inconnues.*

114. Comment aurait-on pu parvenir directement aux dévelop-

pements (21)? Il aurait suffi de prendre les équations (12) et (12 *bis*), ainsi que les équations (13) qui s'en déduisent, et d'en poursuivre l'intégration par les procédés du n° 109 mais *avec une différence*. Au lieu de prendre

$$C_0 = B\,\frac{\sin(k_1 w_1 + k_2 w_2 + h) - \sin h}{k_1 n_1 + k_2 n_2},$$

nous prendrons

$$C_0 = B\,\frac{\sin(k_1 w_1 + k_2 w_2 + h)}{k_1 n_1 + k_2 n_2},$$

et nous conserverons d'ailleurs la relation de récurrence (15).

Nous satisferons ainsi encore à nos équations; mais nous n'aurons plus $C_0 = 0$, $C_m = 0$, ni par conséquent

$$L_i = L_i^1, \qquad \xi_i = \xi_i^1, \qquad \eta_i = \eta_i^1, \qquad \lambda_i = \lambda_i^0,$$

pour

$$\tau = w_1 = w_2 = 0.$$

Nous ne satisferons donc plus aux conditions initiales que nous nous étions imposées au n° 109.

En revanche, on voit que les arguments des sin et des cos dans C_0, C_m, ... seront les mêmes que dans les seconds membres de nos équations, tandis qu'avec la façon de procéder du n° 109, nous introduisions à chaque intégration des arguments nouveaux, puisque nous introduisions des termes en $\sin h$ où h pourrait dépendre des ω_i^0.

D'ailleurs la valeur moyenne de C_0, et par conséquent celle de C_m serait nulle.

Ou bien encore revenons-en aux équations canoniques (5) du n° 79; nous en tirerons par exemple

$$\delta L_i = -\mu \int \frac{dF_1}{d\lambda_i}\,dt,$$

et l'on devra, pour avoir la valeur de $n^{\text{ième}}$ approximation de δL_i, remplacer les inconnues dans les seconds membres par leurs valeurs de $(n-1)^{\text{ième}}$ approximation. Les divers termes de la quantité sous le signe $\int$ prendront alors la forme

$$A\,t^m \cos(\nu t + h),$$

et nous avons vu au n° 98 que l'intégrale indéfinie de cette

expression se compose de $m+1$ termes de la forme

$$\mathrm{B}\,t^p \frac{\cos}{\sin}(\nu t + h) \qquad (p = 1, 2, \ldots, m).$$

A cette intégrale indéfinie, il convient d'ajouter une constante d'intégration. Jusqu'à présent nous avons choisi cette constante de telle façon que δL_i s'annule avec t; en d'autres termes nous avons toujours intégré entre les limites zéro et t. C'est ainsi que nous sommes arrivés aux développements (11).

Si au contraire nous prenons toujours la constante égale à zéro, c'est la *valeur moyenne* de δL_i qui sera nulle et nous retomberons sur les développements (21); nous prendrions en première approximation

$$L_i = L_i^1, \qquad \lambda_i = w_i + \lambda_i^1, \qquad \xi_i = \xi_i^1, \qquad \eta_i = \eta_i^1.$$

Il est clair que ρ_i^1 et ω_i^1 définis comme nous venons de le faire, ne représentent nullement les valeurs moyennes de ρ_i et de ω_i.

115. J'observerai en passant que si l'on avait pris d'autres constantes d'intégration (que j'appellerai aussi pour un instant L_i', λ_i^1, ξ_i^1 et η_i^1) liées aux valeurs initiales L_i^0, λ_i^0, ξ_i^0 et η_i^0 par des relations de la forme (19), (19 *bis*) ou (20), tout ce que nous avons dit jusqu'ici subsisterait et nous serions encore retombés sur des développements de la forme (21) ou (22).

On aurait pu, par exemple, faire ce choix de façon que ρ_i^1 et ω_i^1 représentent les valeurs moyennes de ρ_i et de ω_i, mais cela n'a pas d'intérêt pour ce qui va suivre.

116. Mais les développements (21) et (22) formés au n° **113** jouissent de propriétés particulières, bien dignes d'attirer l'attention. Nos équations (12) et (12 *bis*) ne changent pas quand on change w_i en $w_i + \varepsilon_k$ (et d'ailleurs nous savons que nos développements satisfont aux équations du mouvement, aussi bien si l'on y fait $\tau = t$, $w_i = n_i t + \varepsilon_i$ que si l'on y fait $\tau = t$, $w_i = n_i t$).

Quand on change w_i en $w_i + \varepsilon_i$ dans les développements (21) les développements ne devront pas cesser de satisfaire aux équations (12) et (12 *bis*); mais que deviendront les valeurs moyennes L_i^1, ξ_i^1, η_i^1, λ_i^1? Les trois premières ne changeront pas, la dernière deviendra $\lambda_i^1 + \varepsilon_i$.

Nos développements ne changeront donc pas quand on changera à la fois ϖ_i en $\varpi_i + \varepsilon_i$ et λ_i^1 en $\lambda_i^1 - \varepsilon_i$. Cela veut dire que ϖ_i et λ_i^1 n'y figureront que par la combinaison $\varpi_i + \lambda_i^1$, c'est-à-dire que

$$k_i = k'_i.$$

Supposons maintenant, comme au début du n° **112**, que l'on fasse tourner tout le système d'un angle ε autour de l'axe des x_3. Alors L_i, L_i^1, ρ_i^1 ne changeront pas, λ_i et λ_i^1 se changeront en $\lambda_i + \varepsilon$, $\lambda_i^1 + \varepsilon$, ω_i^1 en $\omega_i^1 - \varepsilon$, ξ_i et η_i en $\xi_i \cos\varepsilon + \eta_i \sin\varepsilon$ et $-\xi_i \sin\varepsilon + \eta_i \cos\varepsilon$.

Les formules devront subsister puisqu'elles sont indépendantes du choix des axes. Nous devons donc conclure que, quand dans nos développements (22) nous changerons λ_i^1 en $\lambda_i^1 + \varepsilon$ en même temps que ω_i^1 en $\omega_i^1 - \varepsilon$, les inconnues

$$L_i, \quad \lambda_i, \quad \xi_i, \quad \eta_i$$

se changeront en

$$L_i, \quad \lambda_i + \varepsilon, \quad \xi_i \cos\varepsilon + \eta_i \sin\varepsilon, \quad -\xi_i \sin\varepsilon + \eta_i \cos\varepsilon.$$

Si nous nous reportons à ce qui a été dit aux n^{os} **70** et **87**, nous verrons que cela signifie que

$$\sum k' - \sum p = \sum k - \sum p = 0,$$

dans les développements des L et des λ et

$$\sum k' - \sum p = \sum k - \sum p = \pm 1,$$

dans ceux des ξ et des η_i (nous pouvons d'ailleurs toujours supposer que dans cette égalité le dernier membre est $+1$, car s'il était -1 nous n'aurions qu'à changer le signe de l'argument du cosinus, ce qui ne change pas la valeur du cosinus).

On aurait pu obtenir les résultats précédents d'une autre manière. Au n° **114** nous avons vu comment on peut former les développements (22) directement par approximations successives. On aurait pu alors démontrer nos résultats par récurrence en vérifiant que, s'ils sont vrais dans la $(n-1)^{\text{ième}}$ approximation, ils le sont encore dans la $n^{\text{ième}}$.

117. J'ai dit plus haut que dans la pratique on n'a pas à consi-

dérer les termes où le petit diviseur

$$\nu = k_1 n_1 + k_2 n_2$$

correspond à des entiers k_1 et k_2 très grands; et c'est grâce à cette circonstance que j'ai pu dire au n° **101** qu'il n'était presque jamais nécessaire d'avoir égard à plusieurs petits diviseurs différents.

Je suis maintenant en mesure de justifier complètement cette assertion. Cela se verra mieux d'ailleurs sur le développement (22). Dans ce développement, en effet, on a

$$\sum k - \sum p = 0.$$

Si $|k_1|$ et $|k_2|$ sont grands et si ν étant un petit diviseur

$$|k_1 n_1 + k_2 n_2|$$

est très petit; comme dans la pratique le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ ne sera pas voisin de 1, $\left|\sum k\right|$ sera également très grand et il en sera de même de $\left|\sum p\right|$.

Or le degré du terme envisagé est

$$2\sum q + \sum |p| + \left|\sum p\right|.$$

Ce degré est donc très grand et c'est ce qui fait que le terme est négligeable.

Revenons maintenant au développement (16). On devra retomber sur ce développement en partant du développement (22) et en y remplaçant $L_i^1, \lambda_i^1, \xi_i^1, \eta_i^1$ par leurs valeurs (19). Or ces valeurs (19) sont développables suivant les puissances entières positives des ρ_i^0 qui sont des quantités du second degré. Dans les développements (19) nous aurons donc des termes de degré zéro et des termes de degré positif.

Nous retomberons ainsi sur le développement (16) dont chaque terme proviendra d'un des termes de (21); si l'on fait attention à la manière dont il a été obtenu, on voit qu'il sera de degré au moins aussi grand que le terme de (21) d'où il provient. Or le

terme général de (16)

$$\mu^\alpha C'_1 \cos\left(\sum k w + \sum k'\lambda^1 + \sum p\omega^1 + h_0\right)$$

provient d'un terme de (21) en $\sum k w$. Il est donc au moins de degré $\left|\sum k\right|$, bien qu'on n'ait plus ici

$$\sum k - \sum p = 0.$$

118. Si l'on change le triangle ABC en un autre triangle symétrique du premier par rapport au plan des $x_1 x_2$, on ne cessera pas de satisfaire aux équations du mouvement, c'est là une conséquence de la symétrie de la fonction F démontrée au n° 88.

Or cela revient à changer les variables obliques ξ_2, η_2, ξ_4, η_4 en $-\xi_2$, $-\eta_2$, $-\xi_4$, $-\eta_4$, ou bien encore ω_2 et ω_4 en $\omega_2+\pi$ et $\omega_4+\pi$. Si donc on change

$$\xi_2^0,\quad \eta_2^0,\quad \xi_4^0,\quad \eta_4^0$$

en

$$-\xi_2^0,\quad -\eta_2^0,\quad -\xi_4^0,\quad -\eta_4^0,$$

ou ce qui revient au même ω_2^0 et ω_4^0 en $\omega_2^0+\pi$ et $\omega_4^0+\pi$, les variables obliques ξ_2, η_2, ξ_4, η_4 changeront de signe et les autres ne changeront pas.

Si donc les développements des éléments ou des coordonnées sont mis sous la forme (11), le monome $\mathfrak{M}_0$ sera de degré pair en ξ_2^0, η_2^0, ξ_4^0, η_4^0 dans les développements des L, des λ, des ξ_1, η_1, ξ_3, η_3, de x'_1, x'_2, x'_4, x'_5; il sera de degré impair dans ceux de ξ_2, η_2, ξ_4, η_4, x'_3, x'_6. Si l'on met les développements sous la forme (16), on verrait de même que p_2+p_4 serait pair dans le premier cas et impair dans le second. Cela serait vrai d'ailleurs que l'on ait appliqué les procédés du n° 109 ou ceux du n° 113.

119. Homogénéité. — En raisonnant comme aux n°s 73 et 89, on verrait que

L_i,	ρ_i	sont homogènes	de degré	1,
ξ_i,	η_i	»	»	$\frac{1}{2}$,
x'_i,		»	»	2,
λ_i,	ω_i	»	»	0

par rapport aux L_i^0 et aux ρ_i^0, ou bien encore par rapport aux L_i^0, aux $(\xi_i^0)^2$ et aux $(\eta_i^0)^2$.

120. Résumé. — Dans ce Chapitre, nous avons transformé nos développements, de telle façon que nos inconnues se présentent sous la forme de fonctions de trois variables τ, w_1 et w_2. Ces fonctions sont développables suivant les puissances de τ et suivant les cosinus et les sinus des multiples des w.

Elles satisfont aux équations du mouvement quand on y fait

$$\tau = t + c, \qquad w_1 = n_1 t + \varepsilon_1, \qquad w_2 = n_2 t + \varepsilon_2,$$

quelles que soient les valeurs des constantes arbitraires c, ε_1 et ε_2. Outre les trois variables τ et w, nos fonctions dépendent de douze constantes d'intégration et la forme du développement dépend des constantes que l'on choisit. Si l'on adopte les valeurs initiales

$$L_i^0, \quad \lambda_i^0, \quad \xi_i^0, \quad \eta_i^0$$

des inconnues L_i, λ_i, ξ_i, η_i pour $\tau = w_1 = w_2$, les développements prennent la forme (11). Si l'on adopte les valeurs initiales

$$L_i^0, \quad \lambda_i^0, \quad \rho_i^0, \quad \omega_i^0$$

des inconnues L_i, λ_i, ρ_i, ω_i, ils prennent la forme (16). Ce sont là les développements auxquels on est conduit par l'application du procédé du n° **109**.

Mais on peut faire un autre choix. Si, comme au n° **113**, on peut choisir non plus les valeurs initiales des inconnues, mais leurs valeurs moyennes, on est ainsi conduit aux développements (22) qui jouissent de propriétés remarquables.



CHAPITRE VII.

LE PROBLÈME RESTREINT.

121. Le problème restreint. — Au n° 35, nous avons envisagé un problème particulier. Nous avons supposé que les trois corps soient le Soleil, une grosse planète et une petite planète, et que la masse de cette dernière soit assez petite pour que l'on puisse négliger les perturbations qu'elle produit dans le mouvement de la grosse planète. Dans ces conditions, cette grosse planète décrit une ellipse képlerienne; nous avons supposé de plus que l'excentricité de cette ellipse est nulle de telle façon que l'orbite de la grosse planète soit circulaire, et que la petite planète soit à l'origine du temps dans le plan de cette orbite et que sa vitesse initiale soit également dans le plan de cette orbite. Il en résulte évidemment que la petite planète restera *toujours* dans le plan de cette orbite.

Nous pouvons alors appliquer la transformation du n° 30 de deux manières différentes :

1° Nous pouvons, comme au n° 32, supposer $m_4 = 0$, ce qui, comme nous l'avons vu, revient à supposer que la grosse planète est rapportée au Soleil, et la planète au centre de gravité de la grosse planète et du Soleil.

2° Nous pouvons, comme au n° 33, supposer $m_1 = 0$, ce qui revient à rapporter les deux planètes au Soleil.

Dans le premier cas, on aura

$$F = \Phi_0 + m_4 \Phi_1,$$

où

$$\Phi_0 = T_1 - \frac{m_1 m_7}{AC},$$

$$m_4 \Phi_1 = T_2 - \frac{m_1 m_4}{AB} - \frac{m_7 m_4}{BC},$$

$$T_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{y_1'^2}{m_1} + \frac{y_2'^2}{m_2} + \frac{y_3'^2}{m_3}\right), \qquad T_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{y_4'^2}{m_4} + \frac{y_5'^2}{m_5} + \frac{y_6'^2}{m_6}\right).$$

Dans le second cas, on aura

$$F = \Phi_0 + m_1 \Phi_1,$$

où

$$\Phi_0 = T_2 - \frac{m_4(m_1 + m_7)}{BD},$$

$$m_1 \Phi_1 = T_1 - \frac{m_1 m_7}{AC} + m_1 m_4 \left(\frac{1}{BD} - \frac{1}{AB}\right) + m_4 m_7 \left(\frac{1}{BD} - \frac{1}{BC}\right),$$

T_1 et T_2 conservant la même signification.

Dans un cas comme dans l'autre, on trouve que le mouvement de la grosse planète est conforme aux lois de Képler; et que celui de la petite planète se fait conformément aux équations canoniques (13) ou (13 *bis*) du Chapitre II qui s'écrivent

$$(1) \qquad \frac{dx'_i}{dt} = m_4 \frac{d\Phi_1}{dy'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{dt} = - m_4 \frac{d\Phi_1}{dx'_i} \qquad (i = 4, 5, 6),$$

dans le premier cas, et

$$(2) \qquad \frac{dx'_i}{dt} = m_1 \frac{d\Phi_1}{dy'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{dt} = - m_1 \frac{d\Phi_1}{dx'_i} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

dans le second cas.

Dans le premier cas on a, à des infiniment petits près d'ordre supérieur,

$$m'_4 = m'_5 = m'_6 = m_4,$$

et l'on pose

$$y'_i = m'_i y''_i = m_4 y''_i \qquad (i = 4, 5, 6).$$

Dans le second cas, on a

$$m'_1 = m'_2 = m'_3 = m_1$$

et l'on pose

$$y'_i = m'_i y''_i = m_1 y''_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

On arrive ainsi aux équations (14) du Chapitre II qui s'écrivent

$$(3) \qquad \frac{dx'_i}{dt} = \frac{d\Phi_1}{dy''_i}, \qquad \frac{dy''_i}{dt} = - \frac{d\Phi_1}{dx'_i},$$

et où l'on doit faire $i = 4, 5, 6$ dans le premier cas, et $i = 1, 2, 3$ dans le second cas.

On remarquera que Φ_1 dépend non seulement des inconnues x' ou y' (ou x'' et y''), mais encore du temps, puisqu'il dépend des

coordonnées de la grosse planète qui sont des fonctions connues du temps.

122. Cela posé, faisons comme au n° 78 et exprimons les x' et les y' en fonctions des éléments canoniques

$$\lambda_i, \quad L_i \qquad (i = 1, 2),$$
$$\rho_i, \quad \omega_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Comme

$$\sum x'\, dy' - \sum \lambda\, dL - \sum \omega\, d\rho$$

est une différentielle exacte, ce changement de variables sera canonique.

Nous retrouverons ainsi les équations (4) du n° 78. Adoptons, pour fixer les idées, l'hypothèse du n° 33, de sorte que m_1 soit très petit et que

$$F = \Phi_0 + m_1 \Phi_1.$$

Le mouvement de la grosse planète étant képlerien, les éléments canoniques de cette grosse planète L_2, ρ_3, ρ_4, ω_3, ω_4, λ_2 demeureront constants à l'exception du dernier λ_2 qui variera proportionnellement au temps.

Quant aux éléments de la petite planète L_1, ρ_1, ρ_2, ω_1, ω_2, λ_1, ils satisferont également aux équations (4) du n° 78; seulement, comme Φ_0 est indépendant de ces éléments, ces équations se réduiront à

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dL_1}{dt} &= -m_1 \frac{d\Phi_1}{d\lambda_1}, & \frac{d\lambda_1}{dt} &= m_1 \frac{d\Phi_1}{dL_1}, \\ \frac{d\rho_i}{dt} &= -m_1 \frac{d\Phi_1}{d\omega_i}, & \frac{d\omega_i}{dt} &= m_1 \frac{d\Phi_1}{d\rho_i} \qquad (i = 1, 2). \end{aligned} \right.$$

Ces équations (4) auraient d'ailleurs pu être obtenues en transformant les équations (2). En effet, l'expression

$$\sum x'_i dy'_i - \lambda_1\, dL_1 - \sum \omega\, d\rho,$$

qui est l'expression (1) du n° 78 est une différentielle exacte. Nous avons donc fait un changement de variables canoniques et, d'après le n° 12, ce changement n'altère pas la forme canonique de nos équations, bien que Φ_1 dépende explicitement du temps.

Les équations (4) sont sous une forme qui pourrait quelquefois sembler gênante puisque les deux membres sont de l'ordre m_1 et par conséquent infiniment petits. Nous poserons donc

$$L_1 = m_1 L'_1, \qquad \rho_i = m_1 \rho'_i \qquad (i = 1, 2).$$

De cette façon les L' et les ρ' seront finis et nos équations deviendront

$$(5) \quad \begin{cases} \dfrac{dL'_1}{dt} = -\dfrac{d\Phi_1}{d\lambda_1}, & \dfrac{d\lambda_1}{dt} = \dfrac{d\Phi_1}{dL'_1}, \\ \dfrac{d\rho'_i}{dt} = -\dfrac{d\Phi_1}{d\omega_i}, & \dfrac{d\omega_i}{dt} = \dfrac{d\Phi_1}{d\rho'_i}. \end{cases}$$

D'ailleurs les équations (5) auraient pu être déduites des équations (3). Car

$$\sum x\, dy'' - \lambda_1\, dL'_1 - \sum \omega_i\, d\rho'_i = \frac{\sum x\, dy' - \lambda_1\, dL_1 - \sum \omega\, d\rho}{m_1}$$

est une différentielle exacte, de sorte que l'on peut prendre pour variables L'_1, λ_1, ρ'_i, ω_i sans que la forme canonique des équations soit altérée.

On voit d'ailleurs que si l'on considère une planète fictive ayant même trajectoire que la planète A'' du n° 74 mais ayant pour masse, non plus m'_1 (c'est-à-dire m_1 puisque $m_1 = m'_1$ à des infiniment petits près d'ordre supérieur), mais 1, les coordonnées de cette planète sont x'_1, x'_2, x'_3, les composantes de sa quantité de mouvement y''_1, y''_2, y''_3 et ses éléments canoniques L'_1, λ_1, ρ'_i, ω_i.

123. Nous avons, d'après le n° 33,

$$m_1 \Phi_1 = T_1 + U_1 + U_3.$$

Au n° **82**, nous avons trouvé

$$T_1 + U_1 = -\frac{M_1}{2 L_1^2}, \qquad M_1 = m'_1 m_1^2 m_7^2.$$

Nous aurons donc

$$\frac{T_1 + U_1}{m_1} = -\frac{M'_1}{2 L_1'^2},$$

où

$$M'_1 = \frac{M_1}{m_1^3} = m_7^2,$$

puisque $m'_1 = m_1$.

Quant à

$$U_3 - \mu F_1$$

nous avons vu au n° 40 la forme particulière qu'elle prend dans le cas qui nous occupe; mais, comme je l'ai dit au n° 41, les mêmes simplifications ne se produiraient pas si l'on adoptait l'hypothèse du n° 32. Nous ne nous en servirons d'ailleurs pas et nous nous bornerons à rappeler quelle est, d'après le Chapitre IV, la forme de la fonction perturbatrice μF_1 et par conséquent celle de Φ_1.

Nous aurons

$$(6)\qquad \frac{U_3}{m_1} = \sum A\, m_1^{q_1+q_2-1} \rho_1'^{q_1} \rho_2'^{q_2} \rho_3^{q_3} \rho_4^{q_4} \cos\left(\sum k_i\lambda_i - \sum p_i\varpi_i\right),$$

où A dépend seulement de L_1' et L_2.

Dans la formule (10) du n° 83, j'ai remplacé ρ_1 et ρ_2 par $m_1\rho_1'$ et $m_1\rho_2'$, j'ai divisé ensuite par m_1, c'est ce qui explique la présence du facteur $m_1^{q_1+q_2-1}$; de plus j'ai fait $h = 0$ en vertu du théorème du n° 81.

Je rappelle de plus que

$$\sum k = \sum p,$$

en vertu du n° 87 et que

$$2q_i \equiv p_i \pmod 2, \qquad 2q_i \geq |p_i|.$$

Nous supposons de plus que l'orbite de la grosse planète est circulaire, ce qui s'écrit

$$\rho_3 = 0,$$

et que les inclinaisons sont nulles, ce qui s'écrit

$$\rho_2 = \rho_4 = 0.$$

Tous les termes du second membre de (6) sont donc nuls, sauf ceux pour lesquels on a

$$q_2 = q_3 = q_4 = 0,$$

et par conséquent

$$p_2 = p_3 = p_4 = 0.$$

Donc, en posant

$$A\, m_1^{q_1-1} = \mu B,$$

il reste

$$\frac{U_3}{m_1} = \mu \sum B \rho_1'^{q_1} \cos(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + p_1\omega_1),$$

ou

$$(7) \qquad \Phi_1 = -\frac{M_1'}{2L_1'^2} + \mu \sum B \rho_1'^{q_1} \cos(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + p_1\omega_1),$$

B ne dépend que de L_1' et de L_2; je puis même dire qu'il ne dépend que de L_1', puisque L_2 est une constante absolue qui est une des données de la question.

On a d'ailleurs

$$(8) \qquad k_1 + k_2 = p_1.$$

Quant à λ_2 nous pouvons le regarder comme égal à $n_2 t$, en prenant pour origine du temps l'instant où la longitude de la grosse planète est nulle; d'autre part n_2 est une constante absolue qui est une des données de la question.

Posons alors

$$F' = F_0' + \mu F_1' = \Phi_1 + n_2(\rho_1' - L_1'),$$

$$F_0' = -\frac{M_2'}{2L_1'^2} + n_2(\rho_1' - L_1'),$$

$$F_1' = \sum B \rho_1'^{q_1} \cos(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + p_1\omega_1),$$

$$\lambda_1' = \lambda_1 - \lambda_2, \qquad \omega_1' = \omega_1 + \lambda_2.$$

Les équations du mouvement deviendront

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dL_1'}{dt} &= -\frac{dF'}{d\lambda_1'}, & \frac{d\lambda_1'}{dt} &= \frac{dF'}{dL_1'}, \\ \frac{d\rho_1'}{dt} &= -\frac{dF'}{d\omega_1'}, & \frac{d\omega_1'}{dt} &= \frac{dF'}{d\rho_1'}. \end{aligned} \right.$$

Les équations ont donc encore la forme canonique; seulement cette fois, comme, en vertu de la relation (8),

$$F_1' = \sum B \rho_1'^{q_1} \cos(k_1\lambda_1' + p_1\omega_1'),$$

notre fonction F′ ne dépend que des quatre inconnues L_1', ρ_1', λ_1', ω_1' et *ne dépend plus explicitement du temps.*

124. **Intégrale de Jacobi.** — Au n° 34, nous avons vu que, dans

les cas des nos 32 et 33, les intégrales des forces vives et des aires deviennent illusoires, et cela parce que la fonction Φ_1 dépend explicitement du temps.

Ici notre fonction F' ne dépendant pas explicitement du temps, nos équations (9) admettent l'intégrale

$$F' = \text{const.},$$

qui est connue sous le nom d'*intégrale de Jacobi*.

125. **Remarque.** — Il importe de faire une observation au sujet de F'_0. Nous avons

$$\frac{dF'_0}{dL'_1} = \frac{M'_1}{L'^3_1} - n_2,$$

$$\frac{dF'_0}{d\rho'_1} = n_2.$$

Il n'y a aucune relation linéaire à coefficients constants ni *a fortiori* à coefficients entiers, entre $\frac{M'_1}{L'^3_1}$ et n_2, puisque la première de ces quantité dépend de L'_1 et que la seconde est une constante.

Il n'y en a donc pas non plus entre les deux dérivées partielles de F'_0.

On verra bientôt l'importance de cette remarque.

126. **Généralisation.** — Soit plus généralement F une fonction de $2n$ variables

$$L_1, \quad L_2, \quad \ldots, \quad L_n,$$
$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n,$$

et envisageons les équations canoniques

$$(10) \qquad \frac{dL_i}{dt} = -\frac{dF}{d\lambda_i}, \qquad \frac{d\lambda_i}{dt} = \frac{dF}{dL_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Je suppose

$$F = F_0 + \mu F_1,$$

où μ est une constante très petite. Je suppose que F_0 dépend seulement des L_i et *de telle façon qu'il n'y ait aucune relation linéaire à coefficients entiers entre les dérivées partielles* $\frac{dF_0}{dL_i}$.

Quant à F_1, c'est une fonction périodique des λ_i, développable suivant les cosinus et les sinus des multiples des λ_i, les coefficients du développement dépendant d'ailleurs des L.

Les équations (9) rentrent comme un cas particulier dans les équations (10) en faisant jouer à F'_0 et F'_1 le rôle de F_0 et F_1, à L'_1 et ρ'_1 celui de L_1 et L_2; à λ'_1 et ω'_1 celui de λ_1 et λ_2.

En effet F'_0 ne dépend que de L'_1 et, ρ'_1 et en vertu du n° 122, il n'y a entre ses dérivées partielles aucune relation linéaire à coefficients entiers.

D'autre part F'_1 est une fonction périodique de λ'_1 et ω'_1.

Observons maintenant que toutes les conclusions des Chapitres V et VI s'appliquent aux équations (10). Dans ces Chapitres nous ne nous sommes occupés que du problème des trois corps, mais les résultats peuvent être immédiatement étendus, d'abord au cas d'un nombre quelconque de corps, et ensuite à des problèmes dynamiques beaucoup plus généraux.

Quelles sont en effet les seules hypothèses qui aient joué un rôle dans nos démonstrations?

1° C'est d'abord que F_0 ne dépend que des L.

Les équations (10) satisfont à cette hypothèse.

Nous ne nous sommes pas servis de la forme particulière de la fonction F_0 et par exemple j'ai toujours désigné les dérivées partielles du second ordre de F_0 par la notation C_{ik}, sans faire intervenir les simplifications qui résultent de ce fait que $C_{12} = 0$ (*cf.* n° 106).

2° C'est ensuite que le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ est incommensurable. Dans le cas où il y a plus de deux variables L, cette condition doit être remplacée par la suivante, qu'il n'y a entre les n_i (c'est-à-dire entre les valeurs des dérivées partielles de F_0 pour $L_i = L_i^0$ aucune relation linéaire à coefficients entiers.

Or nous avons supposé plus haut qu'il n'y avait, dans le cas des équations (10), aucune relation linéaire à coefficients entiers entre les dérivées partielles de F_0 qui soit identiquement satisfaite. Nous pouvons donc toujours supposer qu'on ait choisi les L_i^0 de telle sorte qu'il n'y ait entre les n_i aucune relation de cette forme

3° C'est ensuite que F_1 est périodique par rapport aux λ_i.

Cette condition est encore remplie pour les équations (10).

4° C'est enfin que F_1 est développable suivant les puissances des ξ et des η.

Dans le cas des équations (10), la fonction F_1 ne dépend d'aucune variable analogue aux ξ et aux η. La condition peut donc être considérée comme remplie; seulement le développement de F_1 suivant les puissances des ξ et des η se réduit à un seul terme, le terme de degré *zéro*.

Toutes nos conditions étant remplies, tous les résultats des Chapitres V et VI s'appliquent aux équations (10).

127. Nous pouvons donc satisfaire aux équations (10) en posant

$$(11) \qquad L_i = L_i^0 + \delta L_i, \qquad \lambda_i = n_i t + \lambda_i^0 + \delta\lambda_i,$$

où L_i^0 et λ_i^0 sont des constantes qui représentent les valeurs initiales de L_i et λ_i; où n_i est également une constante égale à la valeur de $\frac{dF_0}{dL_i}$ pour $L_i = L_i^0$; où enfin δL_i et $\delta\lambda_i$ sont développables sous la forme

$$\sum \mu^\alpha A t^m \cos(\nu t + h).$$

A et h sont des constantes dépendant seulement des L_i^0 et des λ_i^0; et l'on a

$$\nu = \sum k_i n_i,$$

les k_i étant des entiers.

J'ajoute que les δL et les $\delta\lambda$ contiennent μ en facteur et d'autre part s'annulent pour $t = 0$.

C'est la formule (6) du n° **102**. Seulement le monome $\mathfrak{M}_0$ a disparu, parce que nous n'avons pas de variables analogues aux ξ et aux η.

Mais il y a plus : nous pouvons former des développements dépendant de $n + 1$ variables

$$\tau, \quad w_1, \quad w_2, \quad \ldots, \quad w_n,$$

en remplaçant dans le développement de δL_i et de $\delta\lambda_i$ la lettre t par τ quand elle est en dehors du signe cos et νt par $\sum k_i w_i$ sous le signe cos. D'autre part dans le premier terme du second membre de la seconde équation (11), nous remplacerons $n_i t$ par w_i.

Si donc nous avons

$$dL_i = \sum \mu^\alpha A\, t^m \cos(\nu t + h),$$

$$d\lambda_i = \sum \mu^\alpha A'\, t^m \cos(\nu t + h'),$$

nos nouveaux développements s'écriront

$$(12)\qquad \begin{cases} L_i = \quad L_i^0 \quad + \sum \mu^\alpha A\, \tau^m \cos\left(\sum k_i w_i + h\right), \\ \lambda_i = w_i + \lambda_i^0 + \sum \mu^\alpha A' \tau^m \cos\left(\sum k_i w_i + h'\right). \end{cases}$$

Si, dans ces nouveaux développements, nous faisons

$$\tau = t, \qquad w_i = n_i t,$$

nous retombons sur les développements (11) et par conséquent nous satisfaisons aux équations (10).

Mais le Chapitre VI nous a appris que si, dans ces développements (12), nous faisons

$$\tau = t - c, \qquad w_i = n_i t + \varepsilon_i,$$

nous satisferons encore aux équations (10) quelles que soient les valeurs attribuées aux $n+1$ constantes arbitraires c et ε_i.

128. Toutes les autres conclusions du Chapitre V subsistent; par exemple nous n'aurons pas de terme de rang négatif; nous n'avons pas de terme séculaire mixte de rang nul; nous n'avons pas de terme de rang nul dans le développement des L_i.

En deuxième approximation, c'est-à-dire si nous négligeons μ^2, il n'y aura pas de terme séculaire dans les L_i; c'est là la généralisation du théorème sur l'invariabilité des grands axes. Nous remarquerons qu'ici il s'applique à n variables sur $2n$ tandis que dans le problème des trois corps il ne s'appliquait qu'à 2 variables sur 12.

Cela tient à ce que, dans les équations (10), la fonction F_0 dépend des n variables L (et qu'elles y figurent pour ainsi dire indépendamment puisqu'il n'y a pas de relation linéaire entre les dérivées de F_0). Au contraire, dans le problème des trois corps, cette fonction F_0 ne dépendait que de 2 variables sur 12.

129. Nous allons maintenant transformer notre méthode : *nous allons nous efforcer de la modifier de façon à nous débarrasser des termes séculaires.*

Pour cela nous allons nous servir du théorème du n° 16. La formule (24) de ce numéro s'écrit

$$\sum x\,dy = d\Omega + \sum A_k\,d\alpha_k - dt,$$

dont je rappelle la signification.

La fonction Ω est définie par l'équation

$$\frac{d\Omega}{dt} = F + \sum x\frac{dy}{dt} = F - \sum x\frac{dF}{dx}.$$

Les α_k sont les constantes d'intégration et les A_k sont des fonctions de ces constantes.

La formule en question s'appliquait aux équations (1) du Chapitre I, mais on peut passer de ces équations à nos équations (10) en changeant

$$x, \quad y, \quad F$$

en

$$L, \quad \lambda, \quad -F.$$

La formule devient alors

$$\sum L\,d\lambda = d\Omega + \sum A_k\,d\alpha_k + F\,dt, \tag{13}$$

avec

$$\frac{d\Omega}{dt} = \sum L\frac{dF}{dL} - F. \tag{14}$$

Nous allons substituer à la place des L et des λ leurs développements (12); il est clair qu'après cette substitution

$$\sum L\frac{dF}{dL} - F$$

sera encore développable sous la même forme ; c'est-à-dire suivant les puissances de τ et suivant les sinus et les cosinus des multiples des w.

Nous déterminerons ensuite Ω par l'équation

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{d\Omega}{d\tau} + \sum n_i\frac{d\Omega}{dw_i} = \sum L\frac{dF}{dL} - F. \tag{15}$$

Cette équation est de la même forme que l'équation (13) du Chapitre précédent; nous la traiterons de la même manière, et elle nous donnera pour Ω une valeur développable suivant les puissances de τ et suivant les sinus et les cosinus des multiples des ϖ. Cette équation (15) ne définit pas entièrement Ω, mais nous pouvons dans la formule (13) prendre pour Ω l'une quelconque des solutions de l'équation (15). Nous choisirons celle qui est développable suivant les puissances de τ et les lignes trigonométriques des ϖ.

Nous savons que nous satisfaisons aux équations (10) en faisant

$$\tau = t + c, \qquad \varpi_i = n_i t + \varepsilon_i.$$

Nous aurions ainsi $3n + 1$ constantes d'intégration, à savoir les L_i^0, les λ_i^0, les ε_i et c. Ces constantes ne sont pas distinctes et il nous suffit d'en conserver $2n$; nous pouvons donc annuler $n + 1$ d'entre elles. Nous ferons

$$\lambda_i^0 = c = 0.$$

Dans ces conditions

$$L, \quad \lambda, \quad \Omega$$

seront des fonctions de τ, des ω_i et des L_i^0. Ainsi que nous l'avons vu, la fonction Ω, de même que les L_i et les $\lambda_i - \varpi_i$, est développable suivant les puissances de τ et les lignes trigonométriques des ϖ.

L'expression

$$\sum L\,d\lambda - d\Omega$$

sera donc de la forme

$$H\,d\tau - \sum W_i\,d\varpi_i - \sum C_i\,dL_i^0,$$

où H, W_i et C_i seront des fonctions des L_i^0, des ϖ et de τ développables suivant les puissances de τ et les sinus et les cosinus des multiples des ϖ.

Si nous faisons

$$\tau = t, \qquad \varpi_i = n_i t - \varepsilon_i,$$

d'où

$$d\tau = dt,$$

$$d\varpi_i = n_i\,dt - d\varepsilon_i - t\,dn_i,$$

L et λ devront satisfaire aux équations (10) et par conséquent à la

relation (13). Or on trouve

$$\sum L\, dl - d\Omega = \left(H + \sum W_i n_i\right) dt + \sum W_i\, d\varepsilon_i + \sum C_i^0\, dL_i^0,$$

où l'on a

$$C_i^0 = C_i + t \sum W_k \frac{dn_k}{dL_i^0},$$

puisque, les n_k ne dépendant que des L_i^0, on a

$$dn_k = \sum \frac{dn_k}{dL_i^0} dL_i^0.$$

Nos constantes d'intégration, qui jouent le rôle des α_k de la formule (13), sont ici les L_i^0 et les ε_i.

Donc, d'après le théorème du n° 16, les W_i et les C_i^0, c'est-à-dire les coefficients des $d\varepsilon_i$ et des dL_i^0 qui jouent le rôle des $d\alpha_k$, seront des constantes indépendantes du temps et dépendront seulement des constantes d'intégration. De plus

$$H + \sum W_i n_i = F$$

sera aussi indépendant du temps en vertu de l'équation des forces vives.

Or les W_i sont développables suivant les puissances de μ et de τ et suivant les cosinus et sinus des multiples des w; ils sont donc de la forme de la fonction

$$f(\mu, \tau, w_k),$$

à laquelle s'appliquait le dernier lemme du n° 107. Or pour

$$\tau = t, \qquad w_k = n_k t,$$

notre fonction

$$W_i = f(\mu, \tau, w_k)$$

doit se réduire à une constante f_0 indépendante du temps, et ne dépendre que des constantes d'intégration ε_i et L_i^0; ou mieux encore elle ne dépendra que des L_i^0, puisque nous avons fait $w_k = n_k t$, ce qui veut dire que nous avons supposé $\varepsilon_k = 0$.

On aura donc

$$f(\mu, t, n_k t) - f_0 = 0,$$

f_0 ne dépendant que des L_i^0.

Donc, en vertu du lemme du n° 107, nous devons avoir pour toutes les valeurs de τ et des ϖ

$$W_i - f_0 = f(\mu, \tau, \varpi_k) - f_0 = 0.$$

C'est-à-dire que W_i ne dépend que des L_i^0.

Envisageons maintenant les coefficients C_i et les expressions

$$C_i + \tau \sum W_k \frac{dn_k}{dL_i^0},$$

quand on y fera

$$\tau = t, \qquad \varpi_i = n_i t,$$

cette expression se réduira à

$$C_i + t \sum W_k \frac{dn_k}{dL_i^0},$$

c'est-à-dire à C_i^0 et ne dépendra, comme nous l'avons vu, que des L_i^0; en appliquant le même raisonnement, on verrait que l'on a pour toutes les valeurs de τ et des ϖ

$$C_i + \tau \sum W_k \frac{dn_k}{dL_i^0} = C_i^0,$$

et que C_i^0 ne dépend que des L_k^0.

Il en est de même de F qui est également indépendant du temps.

Reprenons donc l'identité

$$\sum L\, d\lambda - d\Omega = H\, d\tau + \sum W_i\, d\varpi_i + \sum C_i\, dL_i^0, \tag{16}$$

et faisons-y

$$\tau = \varpi_i = 0,$$

pour $\tau = \varpi_i = 0$ on aura

$$\lambda_i = \lambda_i^0,$$

et par conséquent

$$\lambda_i = 0,$$

puisque nous avons supposé les λ_i^0 nuls; Ω se réduira à Ω_0 et C_i se changera en C_i^0 (quantité qui, nous l'avons vu, ne dépend que des L_k^0); on aura d'ailleurs

$$d\tau = d\varpi = d\lambda = 0.$$

Notre identité deviendra donc

$$(16\ bis)\qquad -d\Omega_0 = \sum C_i^0\, dL_i^0.$$

En retranchant (16) et (16 *bis*) il vient

$$\sum L\, d\lambda - \sum W_i\, dw_i = H\, d\tau - d(\Omega - \Omega_0) - \tau \sum W_k \frac{dn_k}{dL_i^0}\, dL_i^0,$$

et si l'on suppose $\tau = 0$, d'où $d\tau = 0$,

$$(17)\qquad \sum L\, d\lambda - \sum W\, dw = d(\Omega - \Omega_0).$$

Reprenons les développements (12) et faisons-y comme plus haut $\lambda_i^0 = 0$, et de plus faisons-y $\tau = 0$.

Ils pourront alors être regardés comme définissant les $2n$ quantités L_i et λ_i en fonction des $2n$ variables L_i^0 et w_i.

D'autre part les n quantités W_i sont, comme nous venons de le voir, des fonctions des n quantités L_i^0, et inversement : remplaçons les L_i^0 par leurs valeurs en fonction des W_i. *Les développements* (12) *où l'on fait* $\lambda_i^0 = \tau = 0$ *peuvent donc être regardés comme définissant les* L *et les* λ *en fonction des* W *et des* w.

Nous pouvons donc prendre les W et les w pour nouvelles variables; la relation (17) nous apprend que le changement de variables est canonique. Il n'altère donc pas la forme canonique des équations (10) qui deviennent

$$(18)\qquad \frac{dW}{dt} = -\frac{dF}{dw}, \qquad \frac{dw}{dt} = \frac{dF}{dW}.$$

Or nous venons de voir que F ne dépend que des L_i^0. Si nous remplaçons les L_i^0 par leurs valeurs en fonction des W_i, F ne dépendra que des W_i et sera indépendant des w.

On aura donc $\frac{dF}{dw} = 0$, et par conséquent

$$W = \text{const}.$$

Il en résulte que F et ses dérivées $\frac{dF}{dW}$ qui ne dépendent que des W seront aussi des constantes.

Soit alors

$$\frac{dF}{dW_i} = n_i = \text{const.},$$

il viendra

$$\frac{dw_i}{dt} = n'_i$$

ou

$$w_i = n'_i t + \varpi_i,$$

ϖ_i étant une nouvelle constante d'intégration.

Les L_i^0, qui ne dépendent que des W, seront également des constantes.

Nous satisferons donc à nos équations en faisant dans les développements (12)

$$\lambda_i^0 = 0, \qquad \tau = 0, \qquad L_i^0 = \text{const.} \qquad w_i = n'_i t + \varpi_i.$$

Les n'_i sont des constantes qui dépendent des L_i^0, *mais qui sont différentes des* n_i.

Le point intéressant c'est que, comme nous avons fait $\tau = 0$, *tous les termes séculaires ont disparu.*

L'analyse qui précède démontre les théorèmes que nous avons établis par une autre voie dans les *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste,* t. II, n[os] 125 et 158, et aussi dans le *Bulletin astronomique,* t. XIV, p. 242, problème B.

130. Le lemme du n° 107 est applicable à la fonction

$$f(\mu, \tau, w),$$

à une condition. Cette fonction peut contenir un nombre infini de termes, mais le coefficient de μ^α n'en doit contenir qu'un nombre fini.

Cette condition est-elle remplie dans le cas qui nous occupe?

Elle l'est si l'on ne prend dans F qu'un nombre fini de termes. Nous avons en effet les équations

$$(19)\quad \begin{cases} \delta L_i = -\mu \displaystyle\int_0^t \frac{dF_1}{d\lambda_i} dt, \\ \delta\lambda_i = \mu \displaystyle\sum C_{ik} \int_0^t dt \int_0^t \frac{dF_1}{d\lambda_k} d\tau + \int_0^t \frac{d\Phi}{dL_i} dt + \mu \int_0^t \frac{dF_1}{dL_i} dt, \end{cases}$$

analogues aux équations (9) du Chapitre V, n° 106; les lettres Φ et C_{ik} ont la même signification que dans ce n° 106; il ne faut donc pas confondre les C_{ik} avec les C_i du n° 129 avec lesquels ils n'ont aucun rapport.

Je suppose que l'on ait démontré qu'en $n^{\text{ième}}$ approximation, c'est-à-dire en négligeant les termes en μ^n et les termes d'ordre supérieur, nos δL_i et nos $\delta\lambda_i$ se réduisent à un nombre fini de termes; je dis que cela sera encore vrai en $(n+1)^{\text{ième}}$ approximation.

Pour avoir les valeurs de $(n+1)^{\text{ième}}$ approximation, nous devons dans les seconds membres des équations (19) substituer à la place des δL_i et des $\delta\lambda_i$ leurs valeurs de $n^{\text{ième}}$ approximation. Nous savons que $\frac{dF_1}{d\lambda_i}$ peut se développer suivant les puissances des δL et des $\delta\lambda$ sous la forme

$$\sum B\mathfrak{M}', \tag{20}$$

$\mathfrak{M}'$ étant un monome entier par rapport aux δL et aux $\delta\lambda$. Nous pouvons arrêter le développement aux termes de degré n *exclusivement* par rapport aux δL et $\delta\lambda$. En effet, comme $\delta\lambda$ et $\delta\lambda$ contiennent μ en facteur, ces termes sont de l'ordre de μ^n. Nous avons donc le droit de les supprimer.

Notre développement (20) se composera donc d'un nombre fini de termes; quant au coefficient B, c'est, à un facteur numérique près, l'une des dérivées partielles d'ordre supérieur de F_1, où l'on a substitué aux inconnues leurs valeurs de première approximation, et, comme nous ne prenons dans F_1 qu'un nombre fini de termes, B n'en contiendra non plus qu'un nombre fini. On raisonnerait de même pour

$$\frac{dF_1}{d\lambda_k}, \quad \frac{d\Phi}{dL_i}, \quad \frac{dF_1}{dL_i}.$$

Les seconds membres des équations (19) ne contiennent donc qu'un nombre fini de termes; il en est donc de même des δL et des $\delta\lambda$. C. Q. F. D.

On voit en même temps que les dérivées partielles de F satisfont à la même condition.

Donc

$$\Omega = \int \sum L \frac{dF}{dL} dt - Ft$$

y satisfait également et il en est de même de

$$W_i = \sum L \frac{d\lambda}{dw_i} - \frac{d\Omega}{dw_i}$$

et de

$$C_i = \sum L \frac{d\lambda}{dL_i^0} - \frac{d\Omega}{dL_i^0}.$$

Toutes ces quantités ne contiendront dans leur développement qu'un nombre fini de termes, si l'on néglige tous les termes qui contiennent μ^n en facteur, et cela quelque grand que soit l'exposant entier n.

Cette circonstance nous permet d'appliquer le lemme du n° **107**.

131. Les quantités W_i et n'_i peuvent être développées suivant les puissances de μ. Cela est évident pour

$$W_i = \sum L \frac{d\lambda}{dw_i} - \frac{d\Omega}{dw_i},$$

puisque L, λ et Ω sont développables suivant les puissances de μ. En effet, il en est ainsi des L et des λ, il en est ainsi de F et de $\frac{dF}{dL}$ qui sont des fonctions des L et des λ, où l'on peut substituer à la place de ces quantités leurs développements suivant les puissances de μ; il en est ainsi enfin de

$$\Omega = \int \left(\sum L \frac{dF}{dL} - F \right) dt.$$

Il est aisé de voir quel est le premier terme du développement. Si nous supposons en effet $\mu = 0$, on trouve

$$L_k = L_k^0, \qquad \lambda_k = w_k,$$

d'où

$$\sum L \frac{d\lambda}{dw_i} = L_i^0,$$

et, d'autre part,

$$F = F_0, \qquad \frac{dF}{dL_k} = n_k$$

et

$$\Omega = \left(\sum n_k L_k^0 - F_0 \right) \tau,$$

d'où

$$\frac{d\Omega}{dw_i} = 0$$

et

$$W_i = L_i^0.$$

Le premier terme du développement est donc L_i^0.

Nous avons dit que F est une constante qui ne dépend que des L_i^0; que les L_i^0 étant fonctions des W_i, et réciproquement, nous pouvons aussi regarder F comme une fonction des W_i; nous aurons alors entre les dérivées partielles par rapport aux W et les dérivées partielles par rapport aux L_i^0 la relation suivante :

$$\frac{dF}{dL_k^0} = \sum \frac{dF}{dW_i} \frac{dW_i}{dL_k^0},$$

ou, en se rappelant la définition de n_i',

$$\sum n_i' \frac{dW_i}{dL_k^0} = \frac{dF}{dL_k^0}.$$

Nous avons ainsi des équations linéaires qui nous donneront les constantes n_i' en fonctions des L_i^0 et de μ. Comme F et W_i et par conséquent $\frac{dF}{dL_k^0}$ et $\frac{dW_i}{dL_k^0}$ sont développables suivant les puissances de μ, comme d'autre part le déterminant de nos équations linéaires se réduit à 1 pour $\mu = 0$ (c'est-à-dire pour $W_i = L_i^0$), les n_i' seront également développables suivant les puissances de μ.

Il est aisé de trouver le premier terme du développement. En effet, pour $\mu = 0$, on a

$$W_i = L_i^0, \qquad F = F_0, \qquad \frac{dF}{dL_k^0} = n_k.$$

et nos équations linéaires se réduisent à

$$n_k' = n_k.$$

Le premier terme du développement de n_i' est donc n_i.

132. Comparaison des développements. — Reprenons nos développements (12), en y faisant comme plus haut $\lambda_i^0 = 0$:

$$L_i = L_i^0 + \sum \mu^\alpha A \tau^m \cos\left(\sum kw + h\right),$$

$$\lambda_i = w_i + \sum \mu^\alpha A' \tau^m \cos\left(\sum kw + h'\right).$$

Nous avons vu que l'on obtient une solution particulière des équations (10) en y faisant

$$\tau = t, \qquad w_i = n_i t.$$

et que l'on en obtient une autre en y faisant

$$\tau = 0, \qquad w_i = n'_i t.$$

Ces deux solutions particulières doivent être identiques, car, dans l'une comme dans l'autre, les valeurs initiales des inconnues L_i et λ_i sont L_i^0 et 0 pour $t = 0$.

Si donc nous développons ces deux solutions suivant les puissances de μ, les deux développements devront être identiques.

Pour la première nous trouvons

$$(21) \quad \begin{cases} L_i = L_i^0 + \sum \mu^\alpha A \, t^m \cos(\nu t + h), \\ \lambda_i = n_i t + \sum \mu^\alpha A' t^m \cos(\nu t + h'), \end{cases}$$

où

$$\nu = \sum k_i n_i.$$

Le développement est terminé, car les n_i et par conséquent ν ne dépendent pas de μ.

Pour la seconde nous trouvons

$$L_i = L_i^0 + \sum \mu^\alpha A \cos(\nu' t + h),$$

$$\lambda_i = n'_i t + \sum \mu^\alpha A' \cos(\nu' t + h'),$$

où

$$\nu' = \sum k_i n'_i,$$

et en ne conservant que les termes où l'exposant m est nul. Mais le développement n'est pas terminé, car les n'_i et ν' dépendent encore de μ.

Soient donc

$$n'_i = n_i + \mu n_i^{(1)} + \mu^2 n_i^{(2)} + \ldots,$$
$$\nu' = \nu + \mu \nu^{(1)} + \mu^2 \nu^{(2)} + \ldots$$

les développements de n'_i et de ν' suivant les puissances de μ; il faut remplacer n'_i et ν' par ces développements et développer $\cos(\nu' t + h)$ suivant les puissances de μ. On trouve ainsi, en développant d'abord suivant les puissances de $\nu' - \nu$,

$$\cos(\nu' t + h) = \sum \frac{1}{m!} (\nu' - \nu)^m t^m \cos\left(\nu t + h + \frac{m\pi}{2}\right).$$

Ensuite $(\nu' - \nu)^m$ peut se développer suivant les puissances de μ, de telle sorte que

$$(\nu' - \nu)^m = m! \sum \mathrm{H}_\beta \mu^\beta,$$

les H_β étant des constantes dépendant des $\nu^{(k)}$ et par conséquent des L_i^0. Il en résulte

$$\cos(\nu' t + h) = \sum \mu^\beta \mathrm{H}_\beta t^m \cos\left(\nu t + h + \frac{m\pi}{2}\right)$$

et par conséquent

$$(22) \quad \begin{cases} \mathrm{L}_i = \mathrm{L}_i^0 + \sum \mu^{\alpha+\beta} \mathrm{A} \mathrm{H}_\beta t^m \cos\left(\nu t + h + \dfrac{m\pi}{2}\right), \\ \lambda_i = n_i t + \sum \mu^\alpha n_i^{(\alpha)} t + \sum \mu^{\alpha+\beta} \mathrm{A}' \mathrm{H}_\beta t^m \cos\left(\nu t + h' + \dfrac{m\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Les deux développements (21) *et* (22) *doivent être identiques.*

Cherchons d'abord les termes séculaires purs. Ce sont ceux pour lesquels $\nu = 0$, $m > 0$; or ν ne peut être nul que si

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0,$$

puisque nous supposons qu'il n'y a pas entre les n_i de relation linéaire à coefficients entiers.

Mais alors on a aussi

$$\nu' = 0, \qquad \nu' - \nu = 0,$$

et le développement de $\cos(\nu' t + h)$ se réduira à un seul terme qui sera constant et qui ne contiendra pas t en facteur.

Ainsi dans les développements (21) *ou* (22) *des* L_i, *il n'y a pas de terme séculaire pur.*

Dans les développements des λ_i, les termes en $\cos(\nu' t + h')$ ne peuvent non plus en donner. Tous les termes séculaires purs proviennent du développement de $n_i' t$, ce sont les termes

$$\mu^\alpha n_i^{\alpha} t.$$

Donc dans les développements (21) *ou* (22) *des* λ_i, *il n'y a pas d'autre terme séculaire pur que des termes en* t.

Comparons maintenant dans les développements (21) et (22) l'ensemble des termes

$$(23)\qquad \sum \mu^\alpha A t^m \cos(\nu t + h)$$

et

$$(24)\qquad \sum \mu^{\alpha+\beta} A H_\beta t^m \cos\left(\nu t + h + \frac{m\pi}{2}\right),$$

qui correspondent à une même valeur du coefficient ν. Ces deux ensembles de termes doivent être identiques.

J'écrirai alors l'ensemble des termes (23) sous la forme

$$(23\ bis)\qquad \sum B_m t^m \cos\nu t + \sum C_m t^m \sin\nu t,$$

où

$$B_m = \sum \mu^\alpha A \cos h, \qquad C_m = -\sum \mu^\alpha A \sin h,$$

ces dernières sommations étant étendues à tous ceux des termes (23) qui correspondent à des valeurs données du coefficient ν et de l'entier m.

De même j'écrirai l'ensemble des termes (24) sous la forme

$$(24\ bis)\qquad \sum D_m t^m \cos\nu t + \sum E_m t^m \sin\nu t,$$

où

$$D_m = \sum \mu^{\alpha+\beta} A H_\beta \cos\left(h + \frac{m\pi}{2}\right),$$

$$E_m = -\sum \mu^{\alpha+\beta} A H_\beta \sin\left(h + \frac{m\pi}{2}\right),$$

ces dernières sommations étant étendues à tous ceux des termes (24) qui correspondent à des valeurs données du coefficient ν et de l'entier m.

Les deux développements devant être identiques, on aura

$$B_m = D_m, \qquad C_m = E_m.$$

Or les développements (24) ou (24 *bis*) proviennent du développement des termes en $\cos\nu' t$ et $\sin\nu' t$ suivant les puissances de $\nu' - \nu$ et par conséquent de μ.

Ces termes sont

$$D_0 \cos\nu' t + E_0 \sin\nu' t = B_0 \cos\nu' t + C_0 \sin\nu' t.$$

Ainsi *l'ensemble des termes périodiques ou séculaires mixtes du développement* (21), qui contiennent en facteur $\cos\nu t$ ou $\sin\nu t$, c'est-à-dire l'ensemble des termes (23), *peut être sommé facilement; il a pour somme*

$$B_0 \cos\nu' t + C_0 \sin\nu' t.$$

Nous voyons de plus que :

Si dans le développement auquel nous conduit l'application directe de la méthode de Lagrange, c'est-à-dire dans le développement (21), *nous connaissons les termes périodiques et les termes séculaires purs, nous en pourrons déduire immédiatement les termes séculaires mixtes.*

En effet, l'ensemble des termes périodiques s'écrit

$$\sum B_0 \cos\nu t + \sum C_0 \sin\nu t.$$

Nous n'avons pas d'autre terme séculaire pur que le terme $n'_i t$ dans le développement de λ_i.

Les termes séculaires mixtes proviennent du développement de

$$\sum B_0 \cos\nu' t + \sum C_0 \sin\nu' t.$$

Or, connaissant les termes périodiques, nous connaissons B_0 et C_0; connaissant les termes séculaires purs, nous connaissons les n'_i et par conséquent ν'.

On arrive donc ainsi à démontrer certaines propriétés des développements (21), c'est-à-dire des développements obtenus par la méthode de Lagrange; ces propriétés sont beaucoup plus simples que dans le cas général du problème des trois corps. La raison de cette simplicité relative est aisée à trouver; elle tient avant tout à l'absence de variables analogues à ξ et à η, de telle sorte que F_0 dépend effectivement de n variables sur $2n$.

133. Généralisation. — On aurait pu varier la méthode de

diverses manières; d'abord, au lieu de faire $\lambda_i^0 = 0$, on aurait pu attribuer aux λ_i^0 des valeurs quelconques, mais *que l'on aurait regardées comme données une fois pour toutes*.

Le raisonnement se serait poursuivi sans changement; par exemple, quand on aurait fait $\tau = w_i = 0$, on aurait trouvé $\lambda_i = \lambda_i^0$ et l'on aurait encore eu $d\tau = dw = d\lambda = 0$.

Si donc nous prenons les développements (12) et que, sans y faire $\lambda_i^0 = 0$, nous y fassions

$$\tau = 0, \qquad w_i = n_i' t + \varpi_i,$$

nous satisferons encore aux équations (10). La solution ainsi trouvée contient $3n$ constantes arbitraires, les L_i^0, les λ_i^0 et les ϖ_i qui bien entendu ne peuvent pas être distinctes.

Dans les développements (12), les quantités A, h, A', h' dépendent des L_i^0 et des λ_i^0, mais il est clair que

$$A\cos h, \qquad A\sin h, \qquad A'\cos h', \qquad A'\sin h',$$

sont des fonctions périodiques des λ_i^0. Nous aurons donc

$$(25)\quad \begin{cases} L_i = L_i^0 \qquad\quad + \sum \mu^\alpha B\,\tau^m \cos\left(\sum k_i w_i + \sum k_i' \lambda_i^0 + h_0\right), \\ \lambda_i = w_i + \lambda_i^0 + \sum \mu^\alpha B'\tau^m \cos\left(\sum k_i w_i + \sum k_i' \lambda_i^0 + h_0'\right). \end{cases}$$

Dans ces développements (25) analogues aux développements (16 *bis*) du Chapitre précédent, les k' sont des entiers, B, h_0, B' et h_0' dépendent seulement des L_i^0.

Il n'y a aucune raison pour que $k_i = k_i'$.

D'après la façon dont les développements (25) ont été formés, L_i et λ_i se réduisent à L_i^0 et λ_i^0 pour $\tau = w_k = 0$. Ces développements ne sont donc autre chose que ceux que nous avons obtenus au n° **109**.

On satisfera aux équations (10), soit en y faisant

$$\tau = t + c, \qquad w_i = n_i t + \varepsilon_i,$$

soit en y faisant

$$\tau = 0, \qquad w_i = n_i t + \varpi_i.$$

Au lieu d'adopter comme constantes arbitraires les valeurs initiales L_i^0 et λ_i^0 de nos variables, nous aurions pu prendre

d'autres constantes arbitraires; nous aurions ainsi donné à nos développements une autre forme.

Il aurait suffi de remplacer dans les équations (25) les constantes anciennes L_i^0 et λ_i^0 par des fonctions de $2n$ constantes nouvelles L_i^1 et λ_i^1.

Soit donc

(26) $$\begin{cases} L_i^0 = \varphi_i(\mu, L_i^1, \lambda_i^1), \\ \lambda_i^0 = \psi_i(\mu, L_i^1, \lambda_i^1), \end{cases}$$

les φ_i et les ψ_i étant des fonctions de μ, des L_i^1 et des λ_i^1 que je puis choisir d'une façon tout à fait arbitraire. Je m'imposerai les conditions suivantes :

1° Les fonctions φ_i et ψ_i devront être développables suivant les puissances de μ;

2° Pour $\mu = 0$, on devra avoir

$$L_i^0 = L_i^1, \qquad \lambda_i^0 = \lambda_i^1;$$

3° Les L_i^0 et les différences $\lambda_i^0 - \lambda_i^1$ devront être des fonctions périodiques des λ_i^1.

Dans les développements (25), substituons à la place des constantes anciennes L_i^0 et λ_i^0 leurs valeurs (26); nous obtiendrons ainsi de nouveaux développements que j'appelle les développements (27).

Quelle en est la forme?

1° Pour $\mu = 0$, ils se réduisent à

(27) $$L_i = L_i^1, \qquad \lambda_i = w_i + \lambda_i^1.$$

2° Les différences $L_i - L_i^1$, $\lambda_i - w_i - \lambda_i^1$ sont développables suivant les puissances de μ et de τ; elles sont des fonctions périodiques des w_k et des λ_k^1.

En d'autres termes, les développements (27) seront tout à fait de même forme que les développements (25); avec cette différence que les L_i^1 et les λ_i^1 y joueront le même rôle que les L_i^0 et les λ_i^0 dans les équations (25).

Seulement, pour $\tau = w = 0$, L_i et λ_i ne se réduiront pas à L_i^1 et λ_i^1.

On aura encore une solution des équations (10) en faisant dans

les développements (27) soit

$$\tau = t + c, \qquad w_i = n_i t + \varepsilon_i,$$

soit

$$\tau = 0, \qquad w_i = n'_i t + \varpi_i,$$

car les développements (27) ne diffèrent pas en réalité des développements (23), ils n'en diffèrent que par la substitution aux constantes L_i^0 et λ_i^0 de leurs valeurs (26).

Parmi tous ces développements (27), il y en a un qui mérite d'attirer notre attention, c'est celui qui est tel que $n'_i = n_i$, mais nous nous arrêterons surtout sur celui que l'on formerait par le procédé du n° **113**. Les L_i^1 et les λ_i^1 représentent alors ce qu'au Chapitre précédent nous appelions les *valeurs moyennes des* L_i *et des* λ_i.

J'ai expliqué assez longuement ce procédé pour n'avoir pas à y revenir; il y aura cependant une divergence.

Nous n'avons rien ici d'analogue aux quantités ρ_i, ω_i, ρ_i^0, ω_i^0 du n° **112**, puisque dans les équations (10) ne figure aucune variable analogue aux ξ et aux η. De là une petite simplification.

On obtiendra ainsi des développements

$$(28) \quad \begin{cases} L_i = L_i^1 \qquad + \sum \mu^\alpha B\, \tau^m \cos\left(\sum k_i w_i + \sum k_i \lambda_i^1 + h_0\right), \\ \lambda_i = w_i + \lambda_i^1 + \sum \mu^\alpha B' \tau^m \cos\left(\sum k_i w_i + \sum k_i \lambda_i^1 + h'_0\right), \end{cases}$$

où B, h_0, B', h'_0 dépendent seulement des L_i^1.

Tous les résultats des Chapitres VI et VII s'appliquent aux développements (28), on en déduira donc une solution des équations (10) soit en y faisant $\tau = t + c$, $w_i = n_i t + \varepsilon_i$, soit en y faisant $\tau = 0$, $w_i = n'_i t + \varpi_i$.

Ce qui distingue le développement (28) des autres développements (27), c'est que, ainsi que nous l'avons vu au n° **116**, le coefficient k_i de w_i est toujours égal au coefficient de λ_i^1. Il résulte de là que les constantes λ_i^1 et ε_i (si l'on fait $\tau = t$, $w_i = n_i t + \varepsilon_i$) ne figureront jamais que par la combinaison $\varepsilon_i + \lambda_i^1$. De même, si l'on fait $\tau = 0$, $w_i = n'_i t + \varpi_i$, les constantes λ_i^1 et ϖ_i ne figureront jamais que par la combinaison $\varpi_i + \lambda_i^1$.

Entre les constantes des développements (25), qui sont les L_i^0 et les λ_i^0 et celles des développements (28), qui sont les L_i^1 et les λ_i^1,

il y a certaines relations, ce sont les relations (26). Comment les former? Je n'ai qu'à prendre les équations (28) et à y remplacer L_i, λ_i w et τ par L_i^0, λ_i^0, o et o. Les équations que nous obtiendrons ainsi ne seront pas autre chose que les relations (20) du n° 113; supposons d'autre part que dans les équations (28) on fasse

$$\tau = t, \qquad w_i = n_i t,$$

on obtiendra certains développements qui satisferont aux équations (10); comment aurait-on pu y parvenir directement? Il est aisé de s'en rendre compte. Supposons qu'on veuille intégrer les équations (10) par approximations successives, on prendra en première approximation

$$L_i = L_i^1, \qquad \lambda_i = w_i + \lambda_i^1.$$

Il reste à voir comment on peut calculer les valeurs de $n^{\text{ième}}$ approximation, connaissant celles de $(n-1)^{\text{ième}}$. On prend d'abord

$$\frac{dL_i}{dt} = -\frac{dF}{d\lambda_i}. \tag{29}$$

Dans le second membre on substitue les valeurs de $(n-1)^{\text{ième}}$ approximation; ce second membre prend la forme

$$\sum B t^m \cos(\nu t + h),$$

et il reste à intégrer par rapport à t pour avoir les valeurs de $n^{\text{ième}}$ approximation des L_i.

Nous avons vu au n° 99 que l'intégrale *indéfinie*

$$\int B t^m \cos(\nu t + h)\, dt$$

contient un terme en $t^m \cos(\nu t + h)$, un terme en $t^{m-1} \sin(\nu t + h)$, un terme en $t^{m-2} \cos(\nu t + h)$, ..., un terme en $t \,{}^{\cos}_{\sin} (\nu t + h)$ et enfin un terme en ${}^{\sin}_{\cos} (\nu t + h)$.

Il faut ajouter à cette intégrale indéfinie une constante arbitraire. Nous avons jusqu'ici choisi cette constante de telle façon que δL_i s'annule pour $t = 0$, c'est-à-dire que nous avons pris

$$\delta L_i = -\mu \int_0^t \frac{dF_1}{d\lambda_i}\, dt.$$

C'est ainsi que nous avons obtenu les développements (12) et (25).

Pour obtenir les développements (28) nous n'opérerons pas de même, *nous prendrons la constante arbitraire égale à zéro.*

Pour avoir ensuite les valeurs de $n^{\text{ième}}$ approximation de λ_i, on se servira de l'équation

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = \frac{dF}{dL_i}. \tag{30}$$

Dans le second membre on doit remplacer les λ_i par leurs valeurs de $(n-1)^{\text{ième}}$ approximation que l'on vient de trouver. L'équation (30) est de même forme que l'équation (29) et se traiterait de la même manière.

Les développements que l'on obtiendra de la sorte sont bien les développements (28), car l'analyse qui précède est, dans le fond, identique à celle du n° **114**.

134. Cas particulier du problème restreint. — Ce que nous avons dit jusqu'ici s'applique au cas général des équations (10), ce que nous allons dire maintenant s'applique seulement au problème restreint que nous avions d'abord en vue.

Nous avons vu au n° **126** que l'on passe des équations (9) du problème restreint aux équations (10) en faisant

$$F' = F, \qquad L'_1 = L_1, \qquad \lambda'_1 = \lambda_1, \qquad \rho'_1 = L_2, \qquad \omega'_1 = \lambda_2.$$

Tous les résultats déjà trouvés s'appliquent donc au problème restreint, mais il y a quelque chose de plus. La fonction F est développable suivant les puissances de

$$\sqrt{2\rho'_1}\cos\omega'_1 = \sqrt{2L_2}\cos\lambda_2, \qquad \sqrt{2\rho'_1}\sin\omega'_1 = \sqrt{2L_2}\sin\lambda_2,$$

quantités que nous appellerons pour abréger ξ et η. Les coefficients du développement dépendront d'ailleurs de L_1 et de λ_1.

L'expression

$$\xi\, d\eta - \rho'_1\, d\omega'_1 = \xi\, d\eta - L_2\, d\lambda_2,$$

étant une différentielle exacte, nos équations (10) resteront canoniques quand on prendra pour variables L_1, λ_1, ξ, η et s'écriront

$$\frac{dL_1}{dt} = -\frac{dF}{d\lambda_1}, \qquad \frac{d\lambda_1}{dt} = \frac{dF}{dL_1}, \qquad \frac{d\xi}{dt} = -\frac{dF}{d\eta}, \qquad \frac{d\eta}{dt} = \frac{dF}{d\xi}. \tag{31}$$

Les seconds membres des équations (31) sont développables suivant les puissances des ξ et des η; voilà ce qu'il y a de nouveau.

Si nous posons comme dans le Chapitre précédent

$$\Delta = \frac{d}{d\tau} + n_1 \frac{d}{dw_1} + n_2 \frac{d}{dw_2},$$

et que nous cherchions les développements de nos inconnues L_1, λ_1, ξ, η en fonctions de τ et des w sous la forme (25), (27) ou (28), nous verrons que ces développements satisfont aux équations

$$(32)\qquad \Delta L_1 = -\frac{dF}{d\lambda_1}, \qquad \Delta\lambda_1 = \frac{dF}{dL_1}, \qquad \Delta\xi = -\frac{dF}{d\eta}, \qquad \Delta\eta = \frac{dF}{d\xi};$$

si nous rappelons que $F_0 = F'_0$ est égal à

$$-\frac{M'_1}{2L'^2_1} + n_2(\rho'_1 - L'_1) = -\frac{M'_1}{2L_1^2} + n_2\left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{2} - L_1\right),$$

nous voyons que nos équations s'écrivent

$$(33)\qquad \begin{cases} \Delta L_1 = -\mu\dfrac{dF_1}{d\lambda_1}, & \Delta\lambda_1 = \dfrac{M'_1}{L_1^3} - n_2 + \mu\dfrac{dF_1}{dL_1}, \\ \Delta\xi + n_2\eta = -\mu\dfrac{dF_1}{d\eta}, & \Delta\eta - n_2\xi = \mu\dfrac{dF_1}{d\xi}. \end{cases}$$

Il reste à faire le choix des constantes d'intégration; je ne choisirai pas les valeurs initiales des inconnues, comme dans les développements (25), ni leurs valeurs moyennes comme dans les développements (28); je prendrai :

1° La valeur moyenne de L_1 (pour $\tau = 0$, bien entendu) que j'appellerai L_1^0;

2° La valeur moyenne de λ_1 que je supposerai nulle;

3° La valeur moyenne de

$$\xi \cos w_2 + \eta \sin w_2,$$

que j'appellerai E, à cause de son analogie avec l'excentricité;

4° La valeur moyenne de

$$\xi \sin w_2 - \eta \cos w_2$$

que je supposerai nulle.

Je vais alors montrer que nos inconnues seront développables

suivant les puissances de

$$E\cos \varpi_2, \qquad E\sin \varpi_2.$$

On a en première approximation

$$L_1 = L_1^0, \qquad \lambda_1 = \varpi_1, \qquad \xi = E\cos \varpi_2, \qquad \eta = E\sin \varpi_2;$$

et la condition est donc remplie en première approximation.

Je dis que si elle est remplie en $(n-1)^{\text{ième}}$ approximation, elle le sera en $n^{\text{ième}}$. Considérons d'abord la première équation (33), le second membre est de la forme

$$\sum B \mathfrak{M}'.$$

Les B sont à un facteur numérique près des dérivées de F où il faut substituer aux inconnues leurs valeurs de première approximation; ils sont donc développables suivant les puissances de $E\cos \varpi_2$ et $E\sin \varpi_2$. Les $\mathfrak{M}'$ sont des monomes entiers par rapport à δL_1, $\delta \lambda_1$, $\delta \xi$, $\delta \eta$ auxquels il faut substituer leurs valeurs de $(n-1)^{\text{ième}}$ approximation. Ces valeurs par hypothèse sont développables suivant les puissances de $E\cos \varpi_2$ et $E\sin \varpi_2$. Notre second membre est donc développable de la même façon.

Notre équation est donc de la forme (13) du Chapitre VI; nous avons vu, aux nos 109 et 114, comment peut s'intégrer une équation de cette forme; nous avons indiqué deux manières de le faire, soit en prenant

$$C_0 = B\frac{\sin(k_1 \varpi_1 + k_2 \varpi_2 + h) - \sin h}{k_1 n_1 + k_2 n_2},$$

soit en prenant

$$C_0 = B\frac{\sin(k_1 \varpi_1 + k_2 \varpi_2 + h)}{k_1 n_1 + k_2 n_2}$$

(*cf.* no 114). Ici il faut employer le second procédé et ajouter ensuite la constante L_1^0, puisque nous voulons que la valeur moyenne de L_1 se réduise à L_1^0. On voit aisément qu'en opérant de cette façon L_1 reste développable suivant les puissances de $E\cos \varpi_2$ et $E\sin \varpi_2$. Il pourrait n'en être pas de même si l'on avait opéré de la première manière, car il pourrait s'introduire des termes en E, E^3, E^5, ...

Passons à la deuxième équation (33); il faut dans le second

membre substituer à la place de L_1 sa valeur de $n^{\text{ième}}$ approximation et à la place des autres inconnues leurs valeurs de $(n-1)^{\text{ième}}$ approximation. Cette équation prend alors la même forme que la précédente et se traiterait de la même façon.

Prenons enfin les deux dernières équations (33); dans les seconds membres, substituons aux inconnues leurs valeurs de $(n-1)^{\text{ième}}$ approximation; on verrait comme plus haut que ces seconds membres sont développables suivant les puissances de $E\cos\varpi_2$ et $E\sin\varpi_2$, de sorte que nos équations prennent la forme

$$(34)\qquad \begin{cases} \Delta\xi + n_2\eta = \sum \mu^\alpha E^q A\,\tau^m \cos(k_1\varpi_1 + k_2\varpi_2 + h), \\ \Delta\eta - n_2\xi = \sum \mu^\alpha E^q A'\,\tau^m \cos(k_1\varpi_1 + k_2\varpi_2 + h'), \end{cases}$$

où A, A', h, h' dépendent seulement de L_1^0 et où q est un entier de même parité que k_2 et au moins égal à $|k_2|$.

Comment peut-on intégrer ces équations? Nous commencerons par mettre à part, dans les seconds membres, les termes où $k_1 = 0$, $k_2 = \pm 1$, et conservant seulement l'ensemble des autres, nous écrirons les équations (34) sous la forme suivante

$$(35)\qquad \begin{cases} \Delta\xi + n_2\eta = \sum B\,\tau^p\cos\varphi + \sum C\,\tau^p\sin\varphi + \sum b\,\tau^m\cos\varphi + \sum c\,\tau^m\sin\varphi, \\ \Delta\eta - n_2\xi = \sum B'\tau^p\cos\varphi + \sum C'\tau^p\sin\varphi + \sum b'\tau^m\cos\varphi + \sum c'\tau^m\sin\varphi. \end{cases}$$

Ici j'ai écrit φ pour $k_1\varpi_1 + k_2\varpi_2$; j'ai désigné par p la plus grande des valeurs de l'exposant m. Les coefficients B et C sont les sommes $\sum \mu^\alpha A\cos h$, $\sum \mu^\alpha A\sin h$, étendues aux termes en $\cos\varphi$ ou $\sin\varphi$ où l'exposant de τ est égal à p; les coefficients b et c sont les sommes analogues étendues aux termes où l'exposant de τ est égal à $m < p$. De même pour B', C', b' c'.

Je poserai alors

$$\xi = \xi' + \xi'', \qquad \eta = \eta' + \eta'',$$

où

$$\xi' = \sum \frac{B'n_2 - C\nu}{\nu^2 - n_2^2}\tau^p\cos\varphi + \sum \frac{B\nu + C'n_2}{\nu^2 - n_2^2}\tau^p\sin\varphi,$$

$$\eta' = \sum \frac{-Bn_2 - C'\nu}{\nu^2 - n_2^2}\tau^p\cos\varphi + \sum \frac{B'\nu - Cn_2}{\nu^2 - n_2^2}\tau^p\sin\varphi.$$

où

$$\nu = k_1 n_1 + k_2 n_2.$$

Nos équations (35) deviennent alors

$$(36)\qquad \begin{cases} \Delta\xi'' + n_2\eta'' = -\dfrac{d\xi'}{d\tau} + \sum b\,\tau^m \cos\varphi + \sum c\,\tau^m \sin\varphi, \\ \Delta\eta'' - n_2\xi'' = -\dfrac{d\eta'}{d\tau} + \sum b'\tau^m \cos\varphi + \sum c'\tau^m \sin\varphi. \end{cases}$$

Ces équations (36) sont de même forme que les équations (35), seulement l'exposant maximum de τ n'est plus que $p - 1$ au lieu de p; de sorte qu'en continuant de proche en proche le même procédé on finira par intégrer complètement les équations (35).

J'observe alors que, si les seconds membres de (35) sont développables suivant les puissances de $E\cos w_2$, et $E\sin w_2$, il en est de même de ξ', de η' et par conséquent des seconds membres des équations (36).

J'aurais donc démontré que ξ et η sont développables suivant la même forme, si les formules précédentes ne se trouvaient en défaut dans le cas où $\nu^2 = n_2^2$, c'est-à-dire où $k_1 = 0$, $k_2 = \pm 1$. C'est pour cette raison que j'ai mis à part les termes où $k_1 = 0$, $k_2 = \pm 1$, d'où $\varphi = \pm w_2$; et il me reste à en étudier l'influence.

Reprenons donc les équations (35) en faisant $\varphi = w_2$ dans les seconds membres; nous pourrions aussi supprimer dans ces seconds membres les signes $\sum$ puisque nous n'avons plus qu'une seule sorte de termes, les termes en w_2.

Posons cette fois

$$\xi = \xi' + \xi'' + \xi''', \qquad \eta = \eta' + \eta'' + \eta''',$$

où

$$(37)\qquad \begin{cases} \xi' = \dfrac{B - C'}{4n_2}\tau^p \sin w_2 - \dfrac{B' + C}{4n_2}\tau^p \cos w_2, \\ \xi'' = \dfrac{B + C'}{2p + 2}\tau^{p+1} \cos w_2 + \dfrac{C - B'}{2p + 2}\tau^{p+1} \sin w_2, \\ \eta' = \dfrac{B - C'}{4n_2}\tau^p \cos w_2 + \dfrac{B' + C}{4n_2}\tau^p \sin w_2, \\ \eta'' = \dfrac{B + C'}{2p + 2}\tau^{p+1} \sin w_2 + \dfrac{B' - C}{2p + 2}\tau^{p+1} \cos w_2, \end{cases}$$

nos équations deviennent alors

$$(38)\quad \begin{cases} \Delta\xi''' + n_2\eta''' = -\dfrac{d\xi'}{d\tau} + \sum b\,\tau^m \cos w_2 + \sum c\,\tau^m \sin w_2, \\ \Delta\eta''' - n_2\xi''' = -\dfrac{d\eta'}{d\tau} + \sum b'\tau^m \cos w_2 + \sum c'\tau^m \sin w_2, \end{cases}$$

et l'on voit que dans les seconds membres l'exposant de τ ne peut dépasser $p-1$; on arrivera ainsi de proche en proche à l'intégration complète de l'équation. On remarquera qu'en opérant de la sorte, si les seconds membres des équations (35) sont développables suivant les puissances de $E\cos w_2$, $E\sin w_2$, il en est de même de ξ', ξ'', η', η'' et par conséquent des seconds membres des équations (38), et l'on en déduira qu'il en est de même des valeurs de ξ et de η que l'on obtient par ce procédé.

On est finalement ramené au cas de $p=0$; cas où l'on a simplement

$$\xi = \xi' + \xi'', \qquad \eta = \eta' + \eta''.$$

Si, dans les formules (37), on suppose $p=0$, on obtiendra les coefficients de $\cos w_2$ et de $\sin w_2$ dans $\xi^\star$ et dans $\eta^\star$, en désignant par $\xi^\star$ et $\eta^\star$ les expressions de ξ et de η obtenues par le procédé que nous venons d'exposer; on voit ainsi que les valeurs moyennes de $\xi^\star\cos w_2 + \eta^\star\sin w_2$ et de $\xi^\star\sin w_2 - \eta^\star\cos w_2$ sont nulles. Ce que nous voulons c'est que ces valeurs moyennes se réduisent à E et à o, il conviendra donc d'ajouter respectivement à $\xi^\star$ et à $\eta^\star$ un terme $E\cos w_2$ et un terme $E\sin w_2$. Elles ne cesseront pas en effet pour cela de satisfaire aux équations (35). Elles ne cesseront pas d'être développables suivant les puissances de $E\cos w_2$ et $E\sin w_2$.

Si au contraire nous avions pris comme données de la question les valeurs initiales ξ_0 et η_0 de ξ et η; il aurait fallu ajouter à $\xi^\star$ et à $\eta^\star$ un terme $G\cos w_2 + H\sin w_2$ et un terme $G\sin w_2 - H\cos w_2$; où $\xi_0 - G$ et $\eta_0 + H$ seraient ce que deviennent les $\xi^\star$ et $\eta^\star$ quand on y fait $\tau = w_1 = w_2 = 0$. Dans ces conditions $G\cos w_2 + H\sin w_2$, $G\sin w_2 - H\cos w_2$ ne seraient pas développables suivant les puissances de $E\cos w_2$, $E\sin w_2$ et il en serait de même de

$$\xi = \xi^\star + G\cos w_2 + H\sin w_2,$$
$$\eta = \eta^\star + G\sin w_2 - H\cos w_2.$$

133. On aurait pu présenter l'analyse précédente sous une autre

forme. Posons

$$X = \xi + i\eta, \qquad Y = \xi - i\eta,$$

notre fonction F sera développable suivant les puissances de X et de Y, et nos équations deviendront

$$(39) \quad \begin{cases} \Delta L_1 = -\mu \dfrac{dF_1}{d\lambda_1}, & \Delta\lambda_1 - \dfrac{M_1'}{L_1^3} + n_2 = \mu \dfrac{dF_1}{dL_1}, \\ \Delta X - in_2 X = 2i\mu \dfrac{dF_1}{dY}, & \Delta Y + in_2 Y = -2i\mu \dfrac{dF_1}{dX}, \end{cases}$$

car

$$X\,dY + 2i\xi\,d\eta$$

est différentielle exacte.

Les deux dernières équations (39) peuvent s'écrire

$$(39\ bis) \quad \begin{cases} \Delta(Xe^{-iw_2}) = 2i\mu e^{-iw_2} \dfrac{dF_1}{dY}, \\ \Delta(Ye^{iw_2}) = -2i\mu e^{iw_2} \dfrac{dF_1}{dX}. \end{cases}$$

Il s'agit de démontrer que L_1, λ_1, X, Y sont développables suivant les puissances de $E\cos w_2$, et $E\sin w_2$ ou, ce qui revient au même, suivant celles de

$$Ee^{iw_2}, \qquad Ee^{-iw_2}.$$

Cela est vrai en première approximation; je suppose que cela le soit en $(n-1)^{\text{ième}}$ approximation et je me propose d'établir que cela est encore vrai en $n^{\text{ième}}$ approximation.

Pour cela je substitue, à la place des inconnues dans les seconds membres des équations (39) et (39 *bis*), leurs valeurs de $(n-1)^{\text{ième}}$ approximation. Alors les seconds membres des équations (39) sont développables suivant les puissances de $Ee^{\pm iw_2}$. Ceux des équations (39 *bis*) sont égaux à un pareil développement multiplié par e^{-iw_2} ou par e^{iw_2}.

Je dis que cette propriété ne se perd pas par l'intégration. Soit en effet l'équation

$$(40) \qquad \Delta u = v,$$

où v est une fonction connue de τ, de E et des w; je suppose que ve^{isw_2} soit développable suivant les puissances de τ et de $Ee^{\pm iw_2}$,

que de plus cette fonction étant périodique en w_1 soit en outre développable suivant les cosinus et les sinus des multiples de w_1 ou si l'on aime mieux suivant les puissances de $e^{\pm iw_1}$. En d'autres termes je suppose que v soit développable sous la forme

$$(41) \qquad v = \sum \mathrm{A} \mathrm{E}^q \tau^m e^{i(k_1 w_1 + k_2 w_2)},$$

où A est indépendant de E, τ, w_1, w_2; où q, m, k_1 et k_2 sont des entiers satisfaisant à la condition

$$(42) \qquad q \equiv k_2 + s \pmod 2 \qquad q \geq |k_2 + s|.$$

C'est bien là la forme des seconds membres des équations (39) et (39 *bis*), l'entier s étant égal à zéro pour les équations (39), à $+1$ et à -1 pour les équations (39 *bis*). De plus ces seconds membres dépendent encore de μ et de L_1^0, et sont développables suivant les puissances de μ, mais nous n'avons pas à nous en inquiéter.

Je dis que l'équation (40) nous donnera aussi pour l'inconnue u un développement de la forme (41) avec la même valeur de l'entier s, *pourvu que nous conduisions l'intégration de telle sorte que la valeur moyenne de u soit nulle*, *ou soit égale à un développement de la forme* (41) (c'est-à-dire, puisque cette valeur moyenne est indépendante de τ et des w, soit développable suivant les puissances de E, les exposants étant tous de même parité que s et au moins égaux à s).

Si nous nous reportons en effet aux n°s 98 et 114, nous verrons que chaque terme du développement (41) de v nous donnera $m+1$ termes dans l'expression de u et que ces $m+1$ termes seront de la forme

$$\mathrm{B} \mathrm{E}^q \tau^p e^{i(k_1 w_1 + k_2 w_2)},$$

où B est une constante, et où les entiers q, k_1, k_2 ont mêmes valeurs que dans le terme du développement de v d'où l'on est parti et satisfont par conséquent aux conditions (42); où enfin on donne à p les valeurs $0, 1, 2, \ldots, m$, si k_1 et k_2 ne sont pas nuls et la valeur $m+1$ si k_1 et k_2 sont nuls.

Ainsi u est bien de la forme (41).

Alors en envisageant d'abord la première équation (39), nous voyons que L_1 est développable suivant les puissances de $\mathrm{E}e^{\pm iw_2}$;

il en est donc de même de $\Delta\lambda_1$ en vertu de la deuxième équation (39) et par conséquent de λ_1.

La première équation (39 *bis*) nous apprend que Xe^{-iw_2} est développable sous la forme (41), l'entier s étant égal à 1; et par conséquent que X est développable suivant les puissances de $Ee^{\pm iw_2}$ et la seconde équation (39 *bis*) montre qu'il en est de même de Y.

Le théorème énoncé est donc établi.

136. Il résulte des deux numéros précédents que, dans le cas du problème restreint, les développements (27) de nos inconnues peuvent se mettre sous une forme particulière.

En raisonnant comme au n° 69 on verrait que l'on a

$$L_1 - L_1^0, \quad \lambda_1 - w_1, \quad \xi - E\cos w_2,$$
$$\eta - E\sin w_2 = \sum \mu^\alpha A \tau^m E^q \cos(k_1 w_1 + k_2 w_2 + h),$$

où le premier membre est l'une ou l'autre des quatre quantités

$$(43) \qquad L_1 - L_1^0, \quad \lambda_1 - w_1, \quad \xi - E\cos w_2, \quad \eta - E\sin w_2,$$

et où le second membre, qui s'annule pour $\mu = 0$, est développable suivant les puissances de μ, E et τ et suivant les cosinus et sinus des multiples des w, de telle façon que A et h dépendent seulement de L_1^0 et que l'entier q satisfasse aux conditions

$$(44) \qquad q \equiv k_2 \pmod 2, \qquad q \geq |k_2|.$$

En raisonnant comme aux n°s 71, 86, 111, on verrait que ces développements ne doivent pas changer de signe quand on change τ et w_i en $-\tau$ et $-w_i$. Il en résulte que h doit être égal à 0 ou à $-\frac{\pi}{2}$. Il est égal à 0 si m est pair, et à $-\frac{\pi}{2}$ si m est impair dans les développements de

$$L_1 - L_1^0, \qquad \xi - E\cos w_2.$$

Il est égal à 0 si m est impair, et à $-\frac{\pi}{2}$ si m est pair dans les développements de

$$\lambda_1 - w_1, \qquad \eta - E\sin w_2.$$

On satisfera aux équations du mouvement en faisant dans les

développements (43)

$$\tau = 0, \qquad w_i = n'_i t.$$

On pourrait déduire de tout cela que les quantités que nous avons appelées W_i et n'_i au n° 129 sont développables non seulement suivant les puissances de μ, mais suivant celles de $E \cos w_2$, $E \sin w_2$, et comme ces quantités sont des constantes indépendantes de w_2, *qu'elles sont développables suivant les puissances de* μ *et de* E^2.

137. Solution périodique. — Je suppose que, dans les équations (43), je fasse

$$\tau = 0, \qquad w_i = n'_i t + \varpi_i,$$

j'aurai une solution des équations du mouvement (où ne figureront pas de termes séculaires) et qui dépendra de quatre constantes arbitraires

$$L_1^1, \quad E, \quad \varpi_1, \quad \varpi_2.$$

Donnons à la constante arbitraire E la valeur zéro; tous les termes du développement (43) disparaîtront sauf ceux pour lesquels on a $q = 0$ et par conséquent $k_2 = 0$. *Ces termes ne dépendront pas de* w_2.

Donc, pour cette solution particulière, les inconnues L_1, ξ, η, $\lambda_1 - w_1$ sont fonctions de w_1 seulement; de plus, ce sont des fonctions périodiques de w_1 et par conséquent du temps.

Les distances mutuelles des trois corps sont donc des fonctions périodiques du temps. C'est là une solution périodique dont l'importance est très grande.

C'est celle que nous avons étudiée en détail au Chapitre III du Tome I des *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* sous le nom de *solution périodique de la première sorte.*

On voit que la solution périodique ainsi définie dépend de deux constantes arbitraires; nous avons fait en effet $E = 0$, de telle sorte que nos inconnues ne dépendent plus de w_2, ni par conséquent de ϖ_2. Il reste donc deux constantes

$$L_1^1, \quad \varpi_1.$$

Les inconnues L_1 et ξ sont développables suivant les cosinus

des multiples de w_1, et les inconnues ω_1 et η_1 suivant les sinus des multiples de w_1. Il en résulte que quand w_1 est un multiple de 2π, il y a *conjonction symétrique,* c'est-à-dire que les trois corps sont en ligne droite (la petite planète étant entre le Soleil et Jupiter) et que leurs vitesses sont perpendiculaires à la droite qui les joint. Au contraire, quand w_1 est égal à un multiple impair de π, il y a *opposition symétrique,* c'est-à-dire que les trois corps sont en ligne droite (le Soleil étant entre la petite planète et Jupiter) et que leurs vitesses sont perpendiculaires à la droite qui les joint.

Ainsi les conjonctions et les oppositions symétriques se succèdent périodiquement.

Si nous prenons, pour origine du temps, l'instant d'une conjonction symétrique, nous aurons $\varpi_1 = 0$, et il nous restera une seule constante L_1^1; comme le moyen mouvement dépend de cette constante, nous voyons que le moyen mouvement peut prendre toutes les valeurs possibles et qu'à chaque valeur du moyen mouvement correspond une trajectoire périodique de cette sorte.

Dans la pratique, E n'est pas nul, mais très petit, de sorte que la petite planète s'écartera peu de cette trajectoire périodique.

138. **Remarque.** — Reprenons nos développements (25); nous avons vu au n° 132 que, pour obtenir les développements (21), il fallait ou bien y faire $\tau = t$, $w_i = n_i t$, ou bien y faire $\tau = 0$, $w_i = n'_i t$ et développer ensuite suivant les puissances de μ, c'est-à-dire suivant les puissances de $n'_i - n_i$.

Cela revient à dire que si l'on prend les développements (25); si on y fait $\tau = 0$, qu'on remplace w_i par $w_i + (n'_i - n_i)\tau$ et que l'on développe ensuite suivant les puissances de τ, on retrouvera les développements (25) d'où l'on est parti.

Nous avons vu que l'on satisfait aux équations du mouvement en faisant dans les développements (25)

$$\tau = 0, \qquad w_i = n'_i t + \varpi_i.$$

Il résulte de la remarque que nous venons de faire que l'on y satisfera encore en faisant

$$\tau = f(t), \qquad w_i = n'_i t + \varpi_i + (n_i - n'_i) f(t),$$

$f(t)$ étant une fonction quelconque du temps.

Si, en particulier, nous faisons $f(t) = t + c$, nous voyons que l'on satisfait aux équations du mouvement en faisant

$$\tau = t + c, \qquad w_i = n_i t + \varpi_i + (n_i - n'_i)c.$$

Nous voyons ainsi que la constante que nous avons appelée ε_i n'est autre chose que

$$\varpi_i + (n_i - n'_i)c.$$

Au lieu des développements (25) envisageons les développements (28) où figurent les constantes L_i^1 et λ_i^1 qui sont les valeurs moyennes des inconnues. Ce qui caractérise ces développements c'est que w_i et λ_i^1 n'y figurent que par la combinaison $w_i + \lambda_i^1$; nous aurons donc

$$L_i \quad \text{ou} \quad \lambda_i = f(L_i^1, w_i + \lambda_i^1, \tau).$$

D'après la remarque que nous venons de faire, on retrouve les mêmes développements en remplaçant τ par zéro et w_i par $w_i + (n'_i - n_i)\tau$; nous aurons donc

$$L_i \quad \text{ou} \quad \lambda_i = f[L_i^1, w_i + \lambda_i^1 + (n'_i - n_i)\tau];$$

si l'on remplace τ par zéro et w_i par $n'_i t + \varpi_i$, on a

$$L_i \quad \text{ou} \quad \lambda_i = f(L_i^1, n'_i t + \varpi_i + \lambda_i^1),$$

si l'on remplace τ par $t + c$ et w_i par $n_i t + \varepsilon_i$, on a

$$L_i = \lambda_i = f[L_i^1, n'_i t + \lambda_i^1 + \varepsilon_i + (n'_i - n_i)c].$$

Chacune de ces formules ne contient, comme il convient, que $2n$ constantes arbitraires réellement distinctes, à savoir L_i^1 et $\varpi_i + \lambda_i^1$ pour la première; L_i^1 et $\lambda_i^1 + \varepsilon_i + (n'_i - n_i)c$ pour la seconde.



CHAPITRE VIII.

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES PERTURBATIONS SÉCULAIRES.

139. Revenons au cas général du problème des trois corps. Au n° **104** nous avons montré que le terme général du développement des inconnues est de la forme

$$\mu^\alpha \mathrm{A}\,\mathfrak{M}_0\, t^m \cos(\nu t + h),$$

et nous avons classé les termes d'après leur *rang,* c'est-à-dire d'après la valeur du nombre $\alpha - m$.

Au n° **106** nous avons démontré trois théorèmes au sujet du rang :

1° Il n'y a pas de terme de rang négatif;

2° Il n'y a pas de terme séculaire mixte de rang nul;

3° Il n'y a pas de terme de rang nul dans le développement de $\delta \mathrm{L}_i$.

Le problème dont nous allons nous occuper maintenant est la recherche des perturbations séculaires des planètes, c'est-à-dire *la recherche des termes de rang nul.*

L'importance de ce problème ne peut échapper à personne, puisque c'est de ces termes de rang nul que dépendra la configuration du système solaire dans un avenir éloigné.

Pour calculer ces termes de rang nul je vais reprendre les équations (9) du n° **106** que je récris

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\delta \mathrm{L}_i = -\mu\int_0^t \frac{d\mathrm{F}_1}{d\lambda_i}\,dt,\quad \delta\xi_i = -\mu\int_0^t \frac{d\mathrm{F}_1}{d\eta_i}\,dt,\quad \delta\eta_i = \mu\int_0^t \frac{d\mathrm{F}_1}{d\xi_i}\,dt,\\ &\delta\lambda_i = -\mu\sum \mathrm{C}_{ik}\int_0^t dt\int_0^t \frac{d\mathrm{F}_1}{d\lambda_k}\,dt + \int_0^t \frac{d\Phi}{d\mathrm{L}_i}\,dt + \mu\int_0^t \frac{d\mathrm{F}_1}{d\mathrm{L}_i}\,dt.\end{aligned}\right.$$

Nous savons que dans les $\delta \mathrm{L}_i$ il n'y a pas de terme de rang nul;

occupons-nous donc d'abord de rechercher les termes de rang nul de $\delta\xi_i$ et de $\delta\eta_i$.

Pour cela prenons la deuxième et la troisième équation (1), et dans les deux membres de ces deux équations ne conservons que les termes de rang nul (en effet, les deux membres devant être identiques, les termes de rang nul du premier membre sont égaux aux termes de rang nul du second membre).

Les dérivées de F_1 sont de la forme

$$\sum B\mathfrak{M}', \tag{2}$$

où B est à un facteur constant près une des dérivées d'ordre quelconque de F_1 où l'on a substitué, à la place des inconnues L_i, λ_i, ξ_i, η_i, leurs valeurs de première approximation L_i^0, $n_i t+\lambda_i^0$, ξ_i^0, η_i^0.

Quant à $\mathfrak{M}'$, c'est un monome entier par rapport aux δL_i, $\delta\lambda_i$, $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$.

Nous avons vu au n° 106 que les termes de rang nul de $\delta\xi_i$ et de $\delta\eta_i$ ne peuvent provenir que des termes de rang nul de $-\frac{dF_1}{d\eta_i}$ et $\frac{dF_1}{d\xi_i}$ dont le rang s'est élevé d'une unité par la multiplication par μ et s'est abaissé ensuite d'une unité par l'intégration.

On obtiendra un terme de $-\frac{dF_1}{d\eta_i}$ ou $\frac{dF_1}{d\xi_i}$ en prenant dans le développement (2) un terme $B\mathfrak{M}'$; ce terme est le produit de plusieurs facteurs qui sont d'abord B et ensuite les divers facteurs δL, ... de $\mathfrak{M}'$. Il faudra prendre un terme dans chacun de ces facteurs et en faire le produit; on obtiendra ainsi différents termes du développement de $B\mathfrak{M}'$.

Nous prenons un terme dans chacun des facteurs; aucun de ces termes ne peut être de rang négatif; le rang du produit ne pourra donc être nul que si *tous* ces termes sont de rang nul. Tous les termes de rang nul des δL, $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\lambda$ sont séculaires purs. Tous les termes de rang nul du développement de $\mathfrak{M}'$ sont donc séculaires purs, puisqu'ils sont le produit de plusieurs termes séculaires purs.

Chaque terme du développement de $\mathfrak{M}'$ doit être multiplié par un terme du développement de B pour donner un terme du développement de $B\mathfrak{M}'$. Un terme du développement de $B\mathfrak{M}'$ ne peut donner un terme de rang nul dans $\delta\xi$ ou $\delta\eta$ que s'il est lui-

même de rang nul et séculaire pur. Il doit donc être le produit d'un terme de $\mathfrak{M}'$ qui doit être de rang nul et par conséquent séculaire pur, par un terme de B qui doit être lui-même séculaire pur si l'on veut que le produit soit séculaire pur. Bien entendu les termes de B que j'appelle *séculaires purs* sont constants et ne contiennent aucun facteur t^m. Je les appelle ainsi simplement parce qu'ils ne contiennent pas de facteur trigonométrique.

Nous sommes donc amenés à rechercher les termes séculaires purs de B. Soit

$$F_1 = \sum A \cos(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + h),$$

où A et h dépendent des L, des ξ et des η.

Pour obtenir B, il faut prendre une des dérivées d'ordre quelconque, de F_1, multiplier par un facteur numérique et remplacer λ_i par $n_i t + \lambda_i^0$ et les autres variables par des constantes.

Considérons un terme quelconque de F_1. Si k_1 et k_2 ne sont pas nuls à la fois, dans toutes les dérivées de F_1 le terme correspondant contiendra en facteur le cosinus ou le sinus de $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + h$; quand on y aura substitué $n_i t + \lambda_i^0$ à la place de λ_i, il contiendra en facteur le cosinus ou le sinus de $\nu t = k_1\lambda_1^0 + k_2\lambda_2^0 + h$, et comme ν ne sera pas nul, il ne sera pas séculaire pur.

Pour avoir les termes séculaires purs de B, il suffit de réduire F_1 à ses termes indépendants de λ_1 et λ_2. L'ensemble de ces termes sera désigné par R; c'est ce que l'on appelle *la partie séculaire de la fonction perturbatrice*.

Soit alors B_0 l'ensemble des termes séculaires purs de B. Nous voyons que B_0 sera formé avec les dérivées de R comme B avec celles de F_1.

Soit $\mathfrak{M}'_0$ ce que devient $\mathfrak{M}'$ lorsqu'on y remplace δL, $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\lambda$ par leurs termes séculaires purs de rang *zéro*. L'ensemble des termes de rang *zéro* de

$$\sum B\mathfrak{M}'$$

sera alors

$$\sum B_0\mathfrak{M}'_0.$$

Comment avions-nous formé $\sum B\mathfrak{M}'$? Nous avions pris l'une

des deux expressions

$$-\frac{dF_1}{d\eta_i}, \quad \frac{dF_1}{d\xi_i};$$

nous y avions remplacé

$$L_i, \quad \lambda_i, \quad \xi_i, \quad \eta_i$$

par

$$L_i^0 + \delta L_i, \quad \lambda_i^0 + n_i t + \delta\lambda_i, \quad \xi_i^0 + \delta\xi_i, \quad \eta_i^0 + \delta\eta_i,$$

et nous avions développé suivant les puissances de

$$\delta L_i, \quad \delta\lambda_i, \quad \delta\xi_i, \quad \delta\eta_i.$$

Soient alors

$$DL_i, \quad D\lambda_i, \quad D\xi_i, \quad D\eta_i$$

l'ensemble des termes de rang zéro de

$$\delta L_i, \quad \delta\lambda_i, \quad \delta\xi_i, \quad \delta\eta_i.$$

D'après ce que nous venons de voir, $\sum B_0 \mathfrak{M}'_0$ est formé avec R, DL_i, $D\lambda_i$, $D\xi_i$, $D\eta_i$ comme $\sum B\mathfrak{M}'$ avec F_1, δL_i, $\delta\lambda_i$, $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$. On obtiendra donc $\sum B_0 \mathfrak{M}'_0$ en prenant l'une des deux expressions

$$-\frac{dR}{d\eta_i}, \quad \frac{dR}{d\xi_i};$$

en y remplaçant

$$L_i, \quad \lambda_i, \quad \xi_i, \quad \eta_i$$

par

$$L_i^0 + DL_i, \quad \lambda_i^0 + n_i t + D\lambda_i, \quad \xi_i^0 + D\xi_i, \quad \eta_i^0 + D\eta_i,$$

et développant suivant les puissances de

$$DL_i, \quad D\lambda_i, \quad D\xi_i, \quad D\eta_i.$$

Prenons la deuxième équation (1)

$$\delta\xi_i = -\mu \int_0^t \frac{dF_1}{d\eta_i} dt.$$

Nous avons

$$-\frac{dF_1}{d\eta_i} = \sum B\mathfrak{M}';$$

d'où

$$\delta\xi_i = \mu \int_0^t \sum B\mathfrak{M}' dt.$$

Si nous égalons dans les deux membres les termes de rang nul, il

vient

$$D\xi_i = \mu \int_0^t \sum B_0 \mathfrak{M}'_0 \, dt.$$

Or

$$\sum B_0 \mathfrak{M}'_0 = -\frac{dR}{d\eta_i}.$$

Donc

$$D\xi_i = -\mu \int_0^t \frac{dR}{d\eta_i} dt.$$

Si nous réduisons ξ_i à ses termes de rang nul, c'est-à-dire à $\xi_i^0 + D\xi_i$, on aura

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{d\,D\xi_i}{dt},$$

et, par conséquent,

(3) $$\frac{d\xi_i}{dt} = -\mu \frac{dR}{d\eta_i},$$

et de même

(4) $$\frac{d\eta_i}{dt} = \mu \frac{dR}{d\xi_i}.$$

Dans les deux membres des équations (3) et (4), il faut remplacer

$$L_i, \quad \lambda_i, \quad \xi_i \quad \text{et} \quad \eta_i,$$

par

$$L_i^0 + DL_i, \quad \lambda_i^0 + n_i t + D\lambda_i, \quad \xi_i^0 + D\xi_i, \quad \eta_i^0 + D\eta_i.$$

Mais DL_i est nul, puisque L_i ne contient pas de terme de rang nul. De plus R ne dépend pas des λ_i, et il en est de même par conséquent de $\frac{dR}{d\xi_i}$ et de $\frac{dR}{d\eta_i}$; donc les λ_i ne figurent pas dans les équations (3) et (4).

Il suffira donc de remplacer

$$L_i, \quad \xi_i, \quad \eta_i$$

par

$$L_i^0, \quad \xi_i^0 + D\xi_i, \quad \eta_i^0 + D\eta_i.$$

Ainsi les équations (3) et (4), où l'on doit regarder les L_i comme des constantes, forment un système d'équations canoniques qui définissent les termes de rang nul des ξ et des η et par conséquent les perturbations séculaires des excentricités et des inclinaisons.

140. L'analyse précédente peut se présenter sous une forme un peu différente, quoique au fond équivalente.

Considérons le terme général du développement (11) du n° 108; il s'écrira

$$\mu^\alpha \mathrm{A} \tau^m \cos(k_1 w_1 + k_2 w_2 + h);$$

comme il ne peut être de rang négatif, on a $m \leqq \alpha$. Si donc je pose $\mu\tau = \tau'$, notre terme s'écrira

$$\mu^{\alpha-m} \mathrm{A} \tau'^m \cos(k_1 w_1 + k_2 w_2 + h),$$

de sorte que nos développements procéderont suivant les puissances positives de μ et de τ', et suivant les cosinus et les sinus des multiples des w.

Ces développements satisferont aux équations du mouvement et en particulier à l'équation

$$\frac{d\xi_i}{dt} = -\mu \frac{d\mathrm{F}_1}{d\eta_i},$$

quand on y fera

$$\tau' = \mu(t+c), \qquad w_i = \eta_i t + \varepsilon_i.$$

Mais on a alors

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \Delta\xi_i = \mu \frac{d\xi_i}{d\tau'} + n_1 \frac{d\xi_i}{dw_1} + n_2 \frac{d\xi_i}{dw_2}.$$

Notre équation devient ainsi

$$\Delta\xi_i = -\mu \frac{d\mathrm{F}_1}{d\eta_i}. \tag{5}$$

Les deux membres de cette équation sont développables suivant les puissances de μ, de τ', et les cosinus des multiples des w.

Nous obtiendrons les termes de rang nul de ξ_i ou ceux de $-\frac{d\mathrm{F}_1}{d\eta_i}$ en y faisant $\mu = 0$ (je suppose, bien entendu, que, quand je fais $\mu = 0$, τ' demeure fini). Dans ces conditions, ξ_i réduit à ses termes de rang nul ne dépendra plus des w, puisque tous les termes de rang nul sont séculaires purs, de sorte que

$$\Delta\xi_i = \mu \frac{d\xi_i}{d\tau'}.$$

Faisons de même $\mu = 0$ dans $\frac{dF_1}{d\xi_i}$; cela revient à remplacer dans cette dérivée les inconnues L_i, ξ_i, η_i, λ_i par l'ensemble de leurs termes de rang *zéro*, c'est-à-dire par L_i^0, $\xi_i^0 + D\xi_i$, $\eta_i^0 + D\eta_i$, $\lambda_i^0 + \varpi_i + D\lambda_i$. Soit donc

$$A \, {\cos \atop \sin} (k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2)$$

un terme quelconque de $-\frac{dF_1}{d\eta_i}$, où A dépend des ξ, des η et des L.

Si, dans ce terme, je remplace

$$L_i, \quad \xi_i, \quad \eta_i, \quad \lambda_i$$

par

$$L_i^0, \quad \xi_i^0 + D\xi_i, \quad \eta_i^0 - D\eta_i, \quad \lambda_i^0 + \varpi_i + D\lambda_i,$$

il deviendra

$$A_0 \, {\cos \atop \sin} (k_1\varpi_1 + k_2\varpi_2 + h),$$

où A_0 est ce que devient A après cette substitution, tandis que

$$h = k_1\lambda_1^0 + k_2\lambda_2^0 + k_1 \, D\lambda_1 + k_2 \, D\lambda_2.$$

Les termes de rang *zéro* sont séculaires purs et par conséquent indépendants des ϖ; il en résulte que A_0 et h sont indépendants des ϖ. Donc notre terme a pour argument $k_1\varpi_1 + k_2\varpi_2$.

Or nous ne devons conserver que les termes séculaires purs, c'est-à-dire indépendants des ϖ. Ce sont ceux où $k_1 = k_2 = 0$, c'est-à-dire ceux qui proviennent d'un terme de $-\frac{dF_1}{d\eta_i}$ indépendant de λ_1 et de λ_2.

Or l'ensemble des termes de $-\frac{dF_1}{d\eta_i}$ indépendants de λ_1 et de λ_2, c'est précisément $-\frac{dR}{d\eta_i}$.

Si donc nous égalons, dans les deux membres de l'équation (5), les termes séculaires purs de rang *un* $\Big[$je dis *un* et non *zéro*, parce qu'un terme de rang *zéro* de $-\frac{dF_1}{d\eta_i}$ me donne un terme de rang *un* du second membre de (5) $-\mu\frac{dF_1}{d\eta_i}\Big]$, je trouve

$$\mu\frac{d\xi_i}{dz'} = -\mu\frac{dR}{d\eta_i}, \tag{6}$$

où il faut remplacer L_i, ξ_i, η_i par L_i^0, $\xi_i^0 + D\xi_i$, $\eta_i^0 + D\eta_i$, c'est-à-dire réduire L_i, ξ_i, η_i à leurs termes de rang nul.

Je trouve de même

(6 *bis*) $$\mu \frac{d\eta_i}{d\tau} = \mu \frac{dR}{d\xi_i}.$$

Comme d'ailleurs, quand ξ et η sont réduits à leurs termes de rang nul, on a

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \Delta\xi_i = \mu \frac{d\xi_i}{d\tau},$$

je puis écrire

(7) $$\frac{d\xi_i}{dt} = -\mu \frac{dR}{d\eta_i}, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = \mu \frac{dR}{d\xi_i}.$$

Les équations canoniques (7) *nous donneront donc les termes de rang nul des* ξ_i *et des* η_i.

141. Comment pourrait-on se servir de la dernière équation (1)

$$\delta\lambda_i = -\mu \sum C_{ik} \int\int \frac{dF_1}{d\lambda_k}\, dt + \int \frac{d\Phi}{dL_i}\, dt + \mu \int_0^t \frac{dF_1}{dL_i}\, dt,$$

pour calculer les termes de rang *zéro* de $\delta\lambda_i$; ces termes sont ce que nous avons appelé $D\lambda_i$.

Nous avons vu au n° 106 que l'intégrale

$$\int \frac{d\Phi}{dL_i}\, dt$$

ne peut nous donner que des termes de rang *un*, au moins. Quant à la première intégrale

$$\mu \int\int \frac{dF_1}{d\lambda_k}\, dt,$$

les termes de rang *zéro* qu'elle pourrait nous donner ne pourraient provenir que des *termes de rang* un *séculaires purs* de

$$dL_k = -\mu \int \frac{dF_1}{d\lambda_k}\, dt.$$

Or Poisson a démontré que ces termes n'existent pas.

Ainsi nous n'avons à considérer que la troisième intégrale; *mais*

nous ne pourrons l'établir qu'après avoir démontré plus loin le théorème de Poisson.

Quant à la troisième intégrale, on verrait comme au numéro précédent que les termes de rang *zéro* qu'elle peut donner sont compris dans la formule

$$\mu \int_0^t \frac{dR}{dL_i}\,dt,$$

de sorte qu'il reste

$$D\lambda_i = \mu \int_0^t \frac{dR}{dL_i}\,dt. \tag{8}$$

Dans le second membre $\frac{dR}{dL_i}$ dépend des L_i, des ξ_i et des η_i, *mais ne dépend pas des* λ_i; il faut bien entendu y remplacer L_i, ξ_i, η_i par L_i^0, $\xi_i + D\xi_i$, $\eta_i + D\eta_i$.

Donc, quand on aura déterminé à l'aide des équations (7) les termes de rang *zéro* des ξ et des η, c'est-à-dire les perturbations séculaires des excentricités et des inclinaisons, il suffira d'une simple quadrature pour déterminer les termes de rang *zéro* des λ, c'est-à-dire les perturbations séculaires des longitudes moyennes.

142. Forme de R. — Connaissant par le Chapitre IV la forme de F_1, nous pouvons en déduire R, puisqu'on obtient R en supprimant dans F_1 les termes qui dépendent des λ.

Nous avons vu aux n° 83 et 86 que l'on a

$$\mu F_1 = \sum A \rho_1^{q_1} \rho_2^{q_2} \rho_3^{q_3} \rho_4^{q_4} \cos\left(\sum k_i \lambda_i + \sum p_i \omega_i\right),$$

A dépendant seulement des L_i. Nous avons vu que les entiers $2q$ et p satisfont aux conditions

$$2q_i \equiv p_i \pmod 2, \qquad 2q_i \geq |p_i|.$$

Nous avons vu au n° 87 que

$$\sum k = \sum p,$$

et enfin au n° 88 que $p_2 + p_4$ est toujours pair.

Voyons quelles sont les conséquences de tous ces faits. Nous

voyons que F_1 est développable suivant les puissances de

$$\xi_i = \sqrt{2\rho_i}\cos\omega_i, \qquad \eta_i = \sqrt{2\rho_i}\sin\omega_i.$$

Il en est donc de même de R et le degré d'un terme quelconque par rapport aux ξ et aux η est précisément

$$2\sum q.$$

Dans R tous les k sont nuls; et l'on a

$$\sum k = 0$$

et par conséquent

$$\sum p = 0,$$

et comme $2q$ est de même parité que p

$$2\sum q \equiv 0 \pmod{2}.$$

Ainsi le développement de R *suivant les puissances des* ξ *et des* η *ne contient que des termes de degré pair.*

A cause de la condition $\sum p = 0$, nous voyons que R ne changera pas quand on changera ξ_i et η_i en

$$\xi_i\cos\varepsilon - \eta_i\sin\varepsilon, \qquad \xi_i\sin\varepsilon + \eta_i\cos\varepsilon.$$

On a

$$p_2 + p_4 \equiv 0 \pmod{2}.$$

C'est-à-dire que la somme des entiers p *relative à toutes les variables obliques* (c'est-à-dire aux variables qui déterminent les inclinaisons) est paire.

Et comme on a

$$\sum p = 0,$$

on aura aussi

$$p_1 + p_3 \equiv 0 \pmod{2},$$

c'est-à-dire que la somme des entiers p *relative à toutes les variables excentriques* (c'est-à-dire aux variables qui déterminent les excentricités) est paire.

Comme $2q$ est de même parité que p, on en conclut que $2q_2 + 2q_4$ et $2q_1 + 2q_3$ sont également pairs.

Ainsi le développement de R suivant les puissances des ξ et des η ne contient que des termes qui sont de degré pair, tant par rapport aux variables obliques que par rapport aux variables excentriques.

Toutes ces propriétés s'étendent immédiatement au cas où il y a plus de trois corps.

143. Dans une première approximation, nous pouvons négliger les quatrièmes puissances des excentricités et des inclinaisons. C'est ce qu'a fait Lagrange. Les équations (7) prennent alors une forme particulièrement simple.

Soit en effet

$$R = R_0 + R_2 + R_4 + \ldots$$

le développement de R où nous désignerons par R_p l'ensemble des termes de degré p par rapport aux ξ et aux η. Si nous négligeons les quatrièmes puissances des ξ et des η, il restera

$$R = R_0 + R_2,$$

et comme R_0 ne dépend pas des ξ et des η, nos équations (7) deviendront

$$(7\ bis) \qquad \frac{d\xi_i}{dt} = -\mu \frac{dR_2}{d\eta_i}; \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = \mu \frac{dR_2}{d\xi_i}.$$

Comme R_2 est du second degré par rapport aux ξ et aux η les seconds membres seront linéaires par rapport aux ξ et aux η; et les coefficients de ces expressions linéaires ne dépendent que des constantes L_i^0.

Les équations (7 bis) sont donc des équations linéaires à coefficients constants.

Nous savons ensuite que tous les termes du développement de R sont de degré pair à la fois par rapport aux variables obliques et par rapport aux variables excentriques; dans R_2 nous pourrons donc avoir des termes de degré *deux* par rapport aux unes et *zéro*

par rapport aux autres, ou inversement; mais nous ne pourrons pas avoir de termes de degré *un* par rapport aux unes et *un* par rapport aux autres.

On aura donc

$$R_2 = R'_2 + R''_2,$$

R'_2 dépendant seulement des variables excentriques et R''_2 seulement des variables obliques. Le système (7 *bis*) se décomposera donc en deux autres

$$(7\ ter) \qquad \frac{d\xi_i}{dt} = -\mu \frac{dR'_2}{d\eta_i}, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = \mu \frac{dR'_2}{d\xi_i},$$

$$(7\ quater) \qquad \frac{d\xi_i}{dt} = -\mu \frac{dR''_2}{d\eta_i}, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = \mu \frac{dR''_2}{d\xi_i}.$$

Le premier où ne figurent que les variables excentriques déterminera les perturbations séculaires des excentricités; le second où ne figurent que les variables obliques déterminera les perturbations séculaires des inclinaisons.

D'autre part, F_1 ne change pas quand on change les signes des λ et des ω, c'est-à-dire les signes des λ et des η (*voir* n° 86); donc R et R_2 ne changeront pas quand on changera les signes des η. Donc R_2 ne contiendra que des termes de degré *deux* par rapport aux ξ et *zéro* par rapport aux η, ou inversement, mais pas de terme de degré *un* par rapport aux ξ et *un* par rapport aux η; il en sera de même de R'_2 et de R''_2. On aura donc

$$R'_2 = S'_2 + T'_2,$$
$$R''_2 = S''_2 + T''_2,$$

où S'_2 et S''_2 ne dépendent que des ξ, tandis que T'_2 et T''_2 ne dépendront que des η.

Nous avons vu ensuite que R ne change pas quand on change ξ et η, en $\xi \cos\varepsilon - \eta \sin\varepsilon$ et $\xi \sin\varepsilon + \eta \cos\varepsilon$. Il doit donc en être de même de R'_2 et de R''_2; mais dans ces conditions R'_2 devient

$$S'_2(\xi \cos\varepsilon - \eta \sin\varepsilon) + T'_2(\xi \sin\varepsilon + \eta \cos\varepsilon),$$

ou

$$\cos^2\varepsilon\, S'_2(\xi) - 2\cos\varepsilon \sin\varepsilon \sum \eta \frac{dS'_2}{d\xi} + \cos^2\varepsilon\, S'_2(\eta)$$
$$+ \sin^2\varepsilon\, T'_2(\xi) + 2\cos\varepsilon \sin\varepsilon \sum \xi \frac{dT'_2}{d\eta} + \cos^2\varepsilon\, T'_2(\eta).$$

Pour que cette expression, quel que soit ε, se réduise à

$$S'_2(\xi) + T'_2(\eta),$$

il faut que l'on ait

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} &S'_2(\xi) = T'_2(\xi),\\ &\sum \eta \frac{dS'_2}{d\xi} = \sum \xi \frac{dT'_2}{d\eta},\\ &S'_2(\eta) = T'_2(\eta),\end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire *que* S'_2 *soit formé avec les* ξ *comme* T'_2 *avec les* η. De même pour S''_2 et T''_2.

Nos équations deviennent alors

$$(10)\qquad \frac{d\xi_i}{dt} = -\mu \frac{dT'_2}{d\eta_i}, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = \mu \frac{dS'_2}{d\xi_i},$$

pour les variables excentriques et

$$(10\ bis)\qquad \frac{d\xi_i}{dt} = -\mu \frac{dT''_2}{d\eta_i}, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = \mu \frac{dS''_2}{d\xi_i},$$

pour les variables obliques.

144. Intégrales diverses. — Les équations (10) ou (10 *bis*) admettent un certain nombre d'intégrales importantes. D'abord le système (10) ou (7 *ter*) admet l'intégrale des forces vives

$$(11)\qquad R'_2 = \text{const.}$$

De même le système (10 *bis*) ou (7 *quater*) admet l'intégrale des forces vives

$$(11\ bis)\qquad R''_2 = \text{const.}$$

Prenons maintenant les équations (10), multiplions la première par ξ_i, la seconde par η_i et ajoutons; il viendra

$$\sum \xi_i \frac{d\xi_i}{dt} + \sum \eta_i \frac{d\eta_i}{dt} = \mu\left(\sum \eta_i \frac{dS'_2}{d\xi_i} - \sum \xi_i \frac{dT'_2}{d\eta_i}\right).$$

Mais, en vertu des équations (9), le second membre est nul; nous aurons donc

$$(12)\qquad \sum(\xi_i^2 + \eta_i^2) = \text{const.}$$

La sommation doit être étendue à toutes les variables excentriques.

En traitant de la même manière les équations (10 *bis*), on trouverait

$$\sum (\xi_i^2 + \eta_i^2) = \text{const.}; \tag{12 bis}$$

la sommation étant étendue cette fois à toutes les variables obliques.

Les intégrales (12) et (12 *bis*) ne sont pas autre chose que les intégrales des aires. Nous avons vu en effet au n° 90 que ces intégrales s'écrivent

$$-\eta_2\sqrt{L_1 - \rho_1 - \frac{\rho_2}{2}} - \eta_4\sqrt{L_2 - \rho_3 - \frac{\rho_4}{2}} = \text{const.},$$

$$-\xi_2\sqrt{L_1 - \rho_1 - \frac{\rho_2}{2}} - \xi_4\sqrt{L_2 - \rho_3 - \frac{\rho_4}{2}} = \text{const.},$$

$$\sum L - \sum \rho = \text{const.}$$

S'il y a plus de deux planètes, nous écrirons plus généralement

$$\left\{\begin{aligned} -\sum \eta_2\sqrt{L_1 - \rho_1 - \frac{\rho_2}{2}} &= \text{const.},\\ -\sum \xi_2\sqrt{L_1 - \rho_1 - \frac{\rho_2}{2}} &= \text{const.},\\ \sum (L_1 - \rho_1 - \rho_2) &= \text{const.}; \end{aligned}\right. \tag{13}$$

le signe $\sum$ signifiant que le terme explicitement exprimé

$$-\eta_2\sqrt{L_1 - \rho_1 - \frac{\rho_2}{2}}, \quad \ldots$$

se rapporte à la première planète et qu'il faut y ajouter les termes analogues relatifs aux autres planètes.

La troisième équation (13) peut s'écrire

$$\sum L - \frac{1}{2}\sum (\xi^2 + \eta^2) = \text{const.}, \tag{14}$$

la sommation s'étendant cette fois à toutes les variables ξ et η tant excentriques qu'obliques. Cette équation doit être identiquement vérifiée quand on y substitue, à la place des inconnues L, ξ et η,

leurs développements suivant les puissances de μ, de τ et suivant les cosinus et les sinus des multiples des ϖ; ou bien encore, si ayant posé $\mu\tau = \tau'$ comme au n° 140, on substitue aux inconnues leurs développements suivant les puissances de μ, de τ' et suivant les cosinus et les sinus des multiples des ϖ.

Le premier membre se présente alors comme une fonction de μ, de τ' et des ϖ, et cette fonction doit se réduire identiquement à une constante; elle se réduira encore à une constante quand on y fera $\mu = 0$.

Or si l'on fait $\mu = 0$, τ' restant fini, les inconnues L, ξ, η sont réduites à leurs termes de rang *zéro*, ce qui veut dire que l'équation (14) est encore vérifiée quand on réduit les inconnues à leurs termes de rang *zéro*.

Or dans ces conditions L_i se réduit à L_i^0 puisque δL_i ne contient pas de terme de rang *zéro*; de sorte que $\sum L$ est une constante. Il reste donc

$$\sum(\xi^2 + \eta^2) = \text{const.},$$

les ξ et les η étant supposés réduits à leurs termes de rang *zéro*. C'est la somme des équations (12) et (12 *bis*).

145. Remarque. — Il faut observer que nous avons fait implicitement une hypothèse qu'il est nécessaire de signaler parce qu'elle pourrait passer inaperçue : c'est que toutes les planètes tournent dans le même sens. Voici comment elle s'introduit.

Nous avons posé

$$G = L\sqrt{1 - e^2}, \qquad \Theta = G\cos i.$$

Si donc L est positif, G est plus petit que L et positif lui-même; Θ est également positif et plus petit que L. Il en résulte que

$$\rho_1 = L - G, \qquad \rho_2 = G - \Theta$$

sont positifs et que les ξ et les η sont réels.

Si au contraire L est négatif, il en est de même de G et par conséquent de

$$\rho_1 = L(1 - \sqrt{1 - e^2}), \qquad \rho_2 = G(1 - \cos i).$$

Donc les ξ et les η sont imaginaires.

Si donc nous voulons que les ξ et les η soient réels, il faut que les L soient positifs. Or le moyen mouvement d'une planète est égal à un facteur positif (dépendant des masses) divisé par L^3. Supposer les L positifs, c'est donc supposer que tous les moyens mouvements sont positifs, c'est-à-dire que toutes les planètes tournent dans le même sens.

Supposer les L positifs, ce n'est pas restreindre la généralité. En effet, une planète qui se meut dans le sens rétrograde sur une orbite d'une inclinaison i peut être envisagée comme une planète se mouvant dans le sens direct sur une orbite d'une inclinaison $\pi - i$. Il est donc permis de supposer que toutes les planètes se meuvent dans le sens direct.

Mais, dans l'analyse qui précède, nous avons supposé les inclinaisons très petites. Elle ne s'appliquerait donc pas à des planètes se mouvant sur des orbites dont les inclinaisons seraient très petites, mais qui ne se mouvraient pas dans le même sens; il faudrait en effet les envisager comme des planètes se mouvant toutes dans le sens direct, mais dont les inclinaisons seraient très petites pour les unes, très voisines de 180° pour les autres.

Si l'on voulait néanmoins appliquer à ce cas les formules analytiques précédentes, cela serait licite, mais à la condition de se rappeler que quelques-uns des ξ et des η seraient imaginaires.

Peu importe d'ailleurs puisque ce cas ne se présente pas dans la nature.

146. Il s'agit d'intégrer nos équations linéaires (10) ou (10 *bis*). S'il y a $n+1$ corps, soit n planètes, il y a $2n$ variables excentriques et $2n$ variables obliques. Chacun de nos systèmes sera donc d'ordre $2n$.

On sait quelle est la forme générale des solutions d'un système d'ordre p d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. Soient

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_p$$

les inconnues; soient

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_p$$

les racines d'une équation algébrique facile à former et dite *équation déterminante*.

A chacune des racines α_i correspondra une solution particulière du système qui s'écrira

$$x_k = B_{ik} e^{\alpha_i t},$$

les B_{ik} étant des constantes faciles à calculer; et la solution générale sera

$$x_k = A_1 B_{1k} e^{\alpha_1 t} + A_2 B_{2k} e^{\alpha_2 t} + \ldots + A_p B_{pk} e^{\alpha_p t},$$

les A étant des constantes arbitraires.

Dans le cas où l'équation qui donne les α a des racines multiples, il peut y avoir en outre des solutions dites *dégénérescentes* qui sont de la forme

$$x_k = P_{ik} e^{\alpha_i t},$$

P_{ik} étant un polynome entier en t.

Nous allons appliquer ces principes soit au système (10), soit au système (10 *bis*). J'observe d'abord que l'équation qui donne les α ne peut avoir de racine réelle différente de zéro. Si en effet elle avait une racine réelle α, le système admettrait une solution de la forme

$$\xi_k = C_k e^{\alpha t}, \qquad \eta_k = D_k e^{\alpha t},$$

les C et les D étant des constantes. On aurait donc

$$\sum (\xi_k^2 + \eta_k^2) = \sum (C_k^2 + D_k^2) e^{2\alpha t}.$$

Mais le premier membre doit être une constante, le second serait une constante $\sum (C_k^2 + D_k^2)$ multipliée par un facteur variable $e^{2\alpha t}$. Cela n'est possible que si les deux membres sont nuls. On aurait donc

$$\sum (\xi^2 + \eta^2) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\xi = \eta = 0.$$

Je dis maintenant que l'équation ne peut avoir que des racines purement imaginaires, c'est-à-dire dont la partie réelle soit nulle. Soit en effet $\alpha = \beta + i\gamma$ une des racines et supposons que la partie réelle β ne soit pas nulle. Le système devra admettre une solution

particulière de la forme

$$\xi_k = (C_k + iC'_k)e^{(\beta+i\gamma)t},$$
$$\eta_k = (D_k + iD'_k)e^{(\beta+i\gamma)t}.$$

Cette solution est imaginaire, mais la solution imaginaire conjuguée satisfera également aux équations linéaires, il en sera de même de leur demi-somme qui est la partie réelle

$$\xi_k = C_k e^{\beta t}\cos\gamma t - C'_k e^{\beta t}\sin\gamma t,$$
$$\eta_k = D_k e^{\beta t}\cos\gamma t - D'_k e^{\beta t}\sin\gamma t,$$

d'où

$$\begin{aligned}&\sum(\xi_k^2+\eta_k^2)\\ &=\sum(C_k^2+D_k^2)e^{2\beta t}\cos^2\gamma t-2\sum(C_kC'_k+D_kD'_k)e^{2\beta t}\sin\gamma t\cos\gamma t\\ &\quad+\sum(C_k'^2+D_k'^2)e^{2\beta t}\sin^2\gamma t.\end{aligned}$$

Or, si β n'est pas nul, entre les quatre fonctions 1, $e^{2\beta t}\cos^2\gamma t$, $e^{2\beta t}\sin^2\gamma t$, $e^{2\beta t}\cos\gamma t\sin\gamma t$, il n'y a aucune relation linéaire à coefficients constants. L'égalité précédente, dont le premier membre est une constante en vertu des équations (12) et (12 *bis*), ne peut donc avoir lieu que si tous les termes sont nuls. On a donc encore

$$\sum(\xi^2+\eta^2)=0,$$

d'où

$$\xi=\eta=0.$$

Je dis maintenant que notre système ne peut admettre de solution dégénérescente. Supposons en effet qu'il en admette une

(15) $$\xi_k = P_k e^{\alpha t},\qquad \eta_k = Q_k e^{\alpha t},$$

les P_k et les Q_k étant des polynomes entiers en t.

Je puis toujours supposer que ces polynomes sont du premier degré. En effet, si le système admet la solution (15), il admettra également la solution

(15 *bis*) $$\xi_k = P'_k e^{\alpha t},\qquad \eta_k = Q'_k e^{\alpha t},$$

où P'_k et Q'_k sont les dérivées de P_k et de Q_k.

De plus α sera purement imaginaire; car si nous avons la solution (15) où P_k et Q_k sont supposés du premier degré, nous aurons aussi la solution (15 *bis*) où P'_k et Q'_k seront des constantes et à laquelle s'appliqueront les raisonnements précédents par lesquels nous avons établi que α doit être purement imaginaire.

Soit donc $\alpha = i\gamma$; la solution (15) sera imaginaire, mais la solution imaginaire conjuguée satisfera également aux équations, ainsi que la partie réelle. Cette partie réelle se composera d'un terme en $t\cos\gamma t$, d'un terme en $t\sin\gamma t$, d'un terme en $\cos\gamma t$, d'un terme en $\sin\gamma t$. Soit donc

$$\xi_k = \xi'_k + \xi''_k, \qquad \eta_k = \eta'_k + \eta''_k$$

cette partie réelle, où ξ'_k et η'_k représentent l'ensemble des deux termes en $t\cos\gamma t$ et $t\sin\gamma t$, et où ξ''_k et η''_k représentent l'ensemble des deux termes en $\cos\gamma t$ et $\sin\gamma t$.

On aura alors

$$\sum(\xi_k^2 + \eta_k^2) = \sum(\xi_k'^2 + \eta_k'^2) + 2\sum(\xi'_k\xi''_k + \eta'_k\eta''_k) + \sum(\xi_k''^2 + \eta_k''^2).$$

Le premier membre doit être une constante en vertu de l'équation (12).

$\sum(\xi_k'^2 + \eta_k'^2)$ est linéaire en $t^2\cos^2\gamma t$, $t^2\sin^2\gamma t$, $t^2\cos\gamma t\sin\gamma t$,

$\sum(\xi'_k\xi''_k + \eta'_k\eta''_k)$ » $t\cos^2\gamma t$, $t\sin^2\gamma t$, $t\cos\gamma t\sin\gamma t$,

$\sum(\xi_k''^2 + \eta_k''^2)$ » $\cos^2\gamma t$, $\sin^2\gamma t$, $\cos\gamma t\sin\gamma t$.

Or, entre les dix fonctions 1, $t^p\cos^2\gamma t$, $t^p\sin^2\gamma t$, $t^p\cos\gamma t\sin\gamma t$ $(p = 0, 1, 2)$, il n'y a pas d'autre relation linéaire à coefficients constants que

$$\cos^2\gamma t + \sin^2\gamma t = 1.$$

L'équation précédente ne peut donc subsister que si les termes en t^2 ont tous pour coefficient zéro; on a donc

$$\sum(\xi_k'^2 + \eta_k'^2) = 0,$$

d'où

$$\xi'_k = \eta'_k = 0,$$

ce qui montre que les polynomes P_k et Q_k doivent se réduire à des constantes, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de solution dégénérescente.

147. Nos équations ne changent pas quand on change ξ en $-\eta$ et η en ξ, puisque S_2 est formé avec les ξ comme T_2 avec les η.

Si donc elles admettent une solution

$$\xi_k = C_k e^{\alpha t}, \qquad \eta_k = D_k e^{\alpha t},$$

elles admettront également la solution

$$\xi_k = - D_k e^{\alpha t}, \qquad \eta_k = C_k e^{\alpha t}.$$

De plus, elles ne changent pas non plus quand on change η en $-\eta$ et t en $-t$, de sorte qu'elles admettent également les solutions

$$\xi_k = C_k e^{-\alpha t}, \qquad \eta_k = - D_k e^{-\alpha t},$$
$$\xi_k = - D_k e^{-\alpha t}, \qquad \eta_k = - C_k e^{-\alpha t}.$$

Elles admettront donc en outre les solutions

$$(16) \qquad \begin{cases} \xi_k = (C_k - i D_k) e^{\alpha t}, & \eta_k = i (C_k - i D_k) e^{\alpha t}, \\ \xi_k = (C_k + i D_k) e^{\alpha t}, & \eta_k = - i (C_k + i D_k) e^{\alpha t} \end{cases}$$

Si donc $D_k = \pm i C_k$, l'une des deux solutions (16) disparaît et la racine α peut être simple.

Si, au contraire, D_k n'est pas égal à $\pm i C_k$, les deux solutions (16) sont effectives l'une et l'autre et la racine α doit être double; mais les solutions (16), déduites l'une et l'autre de la solution donnée, jouissent de la même propriété: la valeur de η_k est égale à celle de ξ_k au facteur près $\pm i$. Nous pouvons donc, sans restreindre la généralité, supposer

$$D_k = \pm i C_k.$$

Soit donc

$$\alpha = i\gamma,$$

$$(17) \qquad \xi_k = C_k e^{i\gamma t}, \qquad \eta_k = \pm i C_k e^{i\gamma t}.$$

D'après ce que nous avons dit plus haut, nos équations admettront aussi comme solution

$$(17 \textit{ bis}) \qquad \xi_k = C_k e^{-i\gamma t}, \qquad \eta_k = \mp i C_k e^{-i\gamma t}.$$

Si γ est racine simple, il n'y a pas d'autre solution en $e^{i\gamma t}$, ni en

$e^{-i\gamma t}$; de sorte que ces deux solutions doivent être imaginaires conjuguées, d'où l'on conclut que C_k est réel.

Si γ_1 est racine double ou multiple, il faut modifier un peu le raisonnement. Si nos équations admettent la solution (17), elles admettront la solution imaginaire conjuguée

$$\xi_k = C_k^0 e^{-i\gamma t}, \qquad \eta_k = \mp i C_k^0 e^{-i\gamma t},$$

où C_k^0 est imaginaire conjugué de C_k, et par conséquent en changeant η_1 et t en $-\eta_1$ et $-t$:

$$\xi_k = C_k^0 e^{i\gamma t}, \qquad \eta_k = \pm i C_k^0 e^{-i\gamma t},$$

et, par conséquent,

$$\xi_k = (C_k + C_k^0) e^{i\gamma t}, \qquad \eta_k = \pm i (C_k + C_k^0) e^{-i\gamma t},$$

où le coefficient $C_k + C_k^0$ est réel.

Nous pouvons donc toujours supposer que dans la solution (17) le coefficient C_k est réel.

Je dis maintenant qu'on peut toujours supposer que si l'on envisage le signe $\pm$ placé devant i dans la formule (17), c'est le signe $+$ qu'il faut prendre. Si, en effet, c'était le signe $-$, il suffirait de changer γ en $-\gamma$ et l'on retomberait sur la formule (17 *bis*) où le signe $\pm$ est renversé.

Si nos équations admettent la solution (17), elles admettront également la solution imaginaire conjuguée, d'où l'on conclut aisément que la partie réelle de la solution (17)

$$(18) \qquad \xi_k = C_k \cos\gamma t, \qquad \eta_k = -C_k \sin\gamma t,$$

satisfait également aux équations.

Nous sommes donc conduits à chercher à satisfaire à nos équations par des expressions de la forme (18); on en conclut

$$\frac{d\xi_k}{dt} = \gamma\eta_k, \qquad \frac{d\eta_k}{dt} = -\gamma\xi_k.$$

Si nous substituons, par exemple, dans les équations (10), elles deviennent

$$\gamma\eta_i = -\mu\frac{dT'_2}{d\eta_i},$$

$$\gamma\xi_i = -\mu\frac{dS'_2}{d\xi_i}.$$

Comme S'_2 est formé avec les ξ comme T'_2 avec les η, ces équations établissent entre les η les mêmes relations linéaires qu'entre les ξ; il suffira donc de considérer l'une d'elles, par exemple

$$\gamma\xi_i = -\mu \frac{dS'_2}{d\xi_i}. \tag{19}$$

Considérons les n variables excentriques ξ comme les coordonnées d'un point dans l'espace à n dimensions; l'équation

$$S'_2 = 1$$

représentera une surface du second degré dans cet espace. J'appelle $\sum$ cette surface. Si $n = 2$, c'est-à-dire dans le problème des trois corps, cette surface est une ellipse dans un plan; si $n = 3$, c'est-à-dire dans le problème des quatre corps, c'est un ellipsoïde dans l'espace ordinaire.

Cherchons les axes de cette surface $\sum$. Pour cela, considérons la sphère

$$\sum \xi^2 = \lambda^2.$$

Cherchons à déterminer λ^2 de façon qu'elle soit bitangente à $\sum$; alors λ sera la longueur de l'axe correspondant et les deux points de contact en seront les extrémités.

Or on sait qu'on arrive à ce résultat en envisageant la surface conique

$$\sum \xi^2 - \lambda^2 S'_2 = 0$$

et exprimant qu'elle a une droite double; on trouve ainsi les équations

$$2\xi_i = \lambda^2 \frac{dS'_2}{d\xi_i}.$$

Ces équations nous donneront les valeurs de λ^2, et les valeurs des ξ_i qu'on en déduira seront proportionnelles aux cosinus directeurs de l'axe correspondant. Or ces équations s'identifieront aux équations (19) si l'on suppose

$$\frac{\lambda^2}{2} = -\frac{\mu}{\gamma}.$$

Donc les valeurs des γ sont en raison inverse des carrés des axes de la surface $S'_2 = 1$, et sont égales à

$$-\frac{2\mu}{\lambda^2}.$$

Quant aux ξ_k et, par conséquent, aux coefficients C_k, ils sont proportionnels aux cosinus directeurs de l'axe correspondant.

Les solutions de la forme (18) sont donc entièrement déterminées quand on connaît les axes de la surface $S'_2 = 1$ en grandeur et en direction.

Une surface du second degré de l'espace à n dimensions ayant n axes, nous avons n solutions distinctes de la forme (18). De chacune d'elles nous pouvons déduire une solution plus générale contenant deux constantes arbitraires A et h :

$$\xi_k = AC_k \cos(\gamma t + h), \qquad \eta_k = -AC_k \sin(\gamma t + h).$$

En additionnant ces n solutions, on trouve une solution contenant $2n$ constantes arbitraires; on a donc la solution générale du problème.

148. Intégrales quadratiques. — La solution générale s'obtient donc de la façon suivante :

Soit γ_i l'une des n valeurs de γ, la solution particulière correspondante s'écrira

$$\xi_k = A_i C_{ik} \cos(\gamma_i t + h_i), \qquad \eta_k = -A_i C_{ik} \sin(\gamma_i t + h_i),$$

et la solution générale sera donnée par les équations

$$\xi_k = \sum A_i C_{ik} \cos(\gamma_i t + h_i) \tag{20}$$

et

$$\eta_k = -\sum A_i C_{ik} \sin(\gamma_i + h_i). \tag{21}$$

Des n équations (20), je puis tirer les n quantités

$$A \cos(\gamma t + h)$$

sous la forme

$$A_i \cos(\gamma_1 t + h_i) = \sum D_{ik} \xi_k.$$

De même, des n équations (21), je puis tirer les n quantités

$$A \sin(\gamma t + h).$$

et, comme les coefficients C sont les mêmes dans les équations (20) et dans les équations (21), il viendra

$$A_i \sin(\gamma_i t + h_i) = \sum D_{ik} \eta_k.$$

En faisant la somme des carrés, il vient

$$\left(\sum D_{ik} \xi_k\right)^2 + \left(\sum D_{ik} \eta_k\right)^2 = A_i^2 = \text{const.}$$

Ce sont là des intégrales quadratiques de nos équations; il y en a n, puisque l'indice i peut prendre les valeurs 1, 2, ..., n.

149. **Intégrales linéaires.** — Tout ce que nous venons de dire s'applique à la fois aux formules (10), relatives aux variables excentriques, et aux équations (10 *bis*), relatives aux variables obliques. Voici maintenant une propriété qui appartient exclusivement aux équations (10 *bis*).

Reprenons les deux premières équations (13). Ces équations doivent subsister quand les L, les ξ et les η sont réduits à leurs termes de rang *zéro*. Nous avons négligé dans R les quatrièmes puissances des ξ, et, par conséquent, dans $\frac{dR}{d\xi}$ les troisièmes puissances. Continuons donc à négliger les cubes des ξ et, par conséquent, les termes en $\xi\rho$ ou $\eta\rho$; les deux premières équations (13) deviendront

$$\sum \eta_2 \sqrt{L_1} = \text{const.}, \qquad \sum \xi_2 \sqrt{L_1} = \text{const.}$$

Dans ces équations, les L_i doivent être remplacées par leurs termes de rang *zéro*, c'est-à-dire par les constantes L_i^0 et il reste les équations

$$(22) \qquad \sum \xi_2 \sqrt{L_1^0} = \text{const.}, \qquad \sum \eta_2 \sqrt{L_1^0} = \text{const.}$$

Ce sont des intégrales linéaires des équations (10 *bis*).

Cela prouve que l'équation qui donne γ a une racine nulle.

Si nous prenons, en effet, la première équation (22), la constante du second membre peut prendre une valeur quelconque, car les valeurs initiales des ξ peuvent être choisies arbitrairement. Supposons donc cette constante différente de *zéro*.

Substituons dans l'équation (22), à la place des ξ, leurs valeurs (20); nous aurons alors une combinaison linéaire des

$$\cos(\gamma t - h)$$

qui devra être égale à une constante différente de *zéro*. Cela n'est possible que si un des cosinus se réduit à une constante, c'est-à-dire si l'un des γ est nul. C. Q. F. D.

Cela veut dire que la surface du second degré $S''_2 = 1$ a un de ses axes infini, c'est-à-dire qu'elle se réduit à un cylindre, par exemple à deux droites parallèles, si $n = 2$, à un cylindre elliptique si $n = 3$.

Ou bien encore cela veut dire que la forme quadratique S''_2 peut être nulle ainsi que toutes ses dérivées, sans que $\xi, \eta, \ldots$ s'annulent. Dans ce cas, les équations (10 *bis*) se réduiront à

$$\frac{d\xi_i}{dt} = 0, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = 0,$$

de sorte que les ξ et les η seront constants.

C'est ce qu'il est aisé de vérifier; supposons en effet que les orbites de toutes les planètes soient dans un même plan, mais que ce plan n'ait pas été choisi pour plan des $x_1 x_2$.

Alors les inclinaisons ne seront pas nulles et les variables obliques ξ et η ne seront pas nulles non plus. Mais les planètes resteront constamment dans ce même plan; les longitudes des nœuds seront donc constantes, ainsi que les inclinaisons.

Or on a

$$\rho_2 = (L_1 - \rho_1)(1 - \cos i).$$

Le terme $\rho_1(1 - \cos i)$ est du quatrième degré par rapport aux ξ et aux η; il a donc été négligé dans l'analyse précédente; il reste donc

$$\rho_2 = L_1(1 - \cos i).$$

L_1 se réduit à la constante L_1^0, et i est constant d'après ce qui précède. Donc ρ_2 est constant. Si ρ_2 et ω_2 sont constants, il en

est de même de ξ_2 et de η_2, et de même pour toutes les variables obliques qui peuvent ainsi être constantes sans être nulles.

C. Q. F. D.

150. Les équations algébriques d'ordre n qui donnent les valeurs des γ ont été résolues numériquement par Lagrange d'abord, par Le Verrier ensuite. On trouvera des détails à ce sujet dans le Chapitre XXVI du Tome I de la *Mécanique céleste* de Tisserand.

Mais ni Lagrange ni Le Verrier n'ont employé les éléments canoniques. Il faut donc faire attention au changement de notation.

Au lieu de développer comme nous suivant les puissances des ξ et des η, ils développent suivant les puissances des

$$h = e \sin\varpi, \qquad l = e\cos\varpi,$$
$$p = \operatorname{tang} i \sin\theta, \qquad q = \operatorname{tang} i \cos\theta.$$

Mais en négligeant comme nous le faisons les cubes des excentricités et des inclinaisons, on a

$$\xi_1 = \sqrt{\mathrm{L}}\, l, \qquad \eta_1 = -\sqrt{\mathrm{L}}\, h,$$
$$\xi_2 = \sqrt{\mathrm{L}}\, q, \qquad \eta_2 = -\sqrt{\mathrm{L}}\, p.$$

Les L_i se réduisent à des constantes L_i^0, de sorte que les ξ et les η ne diffèrent des h, des l, des p et des q que par des facteurs constants. Le passage d'un développement à l'autre est donc immédiat.

151. **Premier changement de variables.** — Reprenons les équations

$$(10) \qquad \frac{d\xi_i}{dt} = -\mu\frac{d\mathrm{T}'_2}{d\eta_i}, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = \mu\frac{d\mathrm{S}'_2}{d\xi_i}.$$

Considérons la surface du second degré $\mathrm{S}'_2 = 1$; cette surface est située dans l'espace à n dimensions et nous avons convenu que les n variables excentriques ξ

$$\xi_1, \quad \xi_3, \quad \xi_5, \quad \ldots, \quad \xi_{2n-1}$$

représentent les coordonnées d'un point dans cet espace.

Rapportons maintenant cette surface à ses axes, que nous prendrons pour nouveaux axes de coordonnées. Soient

$$\xi'_1, \quad \xi'_3, \quad \xi'_5, \quad \ldots, \quad \xi'_{2n-1}$$

les coordonnées courantes par rapport à ces nouveaux axes. Ce seront des fonctions linéaires des coordonnées anciennes

$$\xi_1, \quad \xi_3, \quad \xi_5, \quad \ldots, \quad \xi_{2n-1},$$

et l'on a d'ailleurs identiquement

$$\sum \xi^2 = \sum \xi'^2,$$

car les deux membres de cette identité représentent l'un et l'autre la distance à l'origine du point de coordonnées courantes.

On aura, puisque la surface S'_2 est rapportée à ses axes,

$$2\mu S'_2 = -\sum \gamma_i \xi_i'^2.$$

Nous définirons de même les η' qui seront liés aux η par *les mêmes* relations linéaires que les ξ' aux ξ. On aura, par conséquent,

$$2\mu T'_2 = -\sum \gamma_i \eta_i'^2$$

et

$$\sum \eta^2 = \sum \eta'^2,$$

$$\sum \xi\eta = \sum \xi'\eta',$$

et identiquement

$$\sum \xi_i \, d\eta_i = \sum \xi'_i \, d\eta'_i,$$

les sommations étant étendues à toutes les valeurs impaires de l'indice i. Le changement de variables est donc canonique, de sorte que le système (10) devient

$$(23) \qquad \frac{d\xi'_i}{dt} = -\mu \frac{dT'_2}{d\eta'_i}, \qquad \frac{d\eta'_i}{dt} = \mu \frac{dS'_2}{d\xi'_i}.$$

Nous opérerons sur le système

$$(10\ bis) \qquad \frac{d\xi_i}{dt} = -\mu \frac{dT''_2}{d\eta_i}, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = \mu \frac{dS''_2}{d\xi_i}$$

relatif aux variables obliques, comme nous avons opéré sur le système (10).

Nous envisagerons le point dont les coordonnées sont les n variables obliques

$$\xi_2,\quad \xi_4,\quad \xi_6,\quad \ldots,\quad \xi_{2n};$$

nous formerons la surface du second degré $S''_2 = 1$; nous la rapporterons à ses axes; nous désignerons par

$$\xi'_2,\quad \xi'_4,\quad \xi'_6,\quad \ldots,\quad \xi'_{2n}$$

les coordonnées par rapport à ces nouveaux axes. Nous définirons η'_2, η'_4, ... de la même manière, c'est-à-dire que nous aurons entre les η' et les η les mêmes relations linéaires qu'entre les ξ' et les ξ.

Dans ces conditions, nous aurons

$$2\mu S''_2 = -\sum \gamma_i \xi_i'^2,$$

$$2\mu T''_2 = -\sum \gamma_i \eta_i'^2,$$

$$\sum \xi_i \, d\eta_i = \sum \xi'_i \, d\eta'_i,$$

les sommations étant étendues aux valeurs paires de i.

Le changement de variables sera donc canonique et le système (10 *bis*) deviendra

$$\text{(23 bis)}\qquad \frac{d\xi'_i}{dt} = -\mu \frac{dT''_2}{d\eta'_i}, \qquad \frac{d\eta'_i}{dt} = \mu \frac{dS''_2}{d\xi'_i}.$$

D'ailleurs il est clair que

$$\sum \xi_i \, d\eta_i = \sum \xi'_i \, d\eta'_i,$$

la sommation étant étendue à *toutes* les valeurs de l'indice i. Le changement de variables est donc canonique et le système (7) devient

$$\text{(24)}\qquad \frac{d\xi'_i}{dt} = -\mu \frac{dR}{d\eta'_i}, \qquad \frac{d\eta'_i}{dt} = \mu \frac{dR}{d\xi'_i}.$$

Si l'on tient compte de la forme de S'_2, T'_2, S''_2, T''_2, on voit que les systèmes (23) et (23 *bis*) deviennent

$$\frac{d\xi'_i}{dt} = \gamma_i \eta'_i, \qquad \frac{d\eta'_i}{dt} = -\gamma_i \xi'_i,$$

d'où

$$\xi'_i = A_i \cos(\gamma_i t + h_i), \qquad \eta'_i = -A_i \sin(\gamma_i t + h_i),$$

A_i et h_i étant des constantes arbitraires.

On déduit de là

$$\xi'^2_i + \eta'^2_i = \text{const.}$$

Ce sont les intégrales quadratiques du n° **148**.

En les combinant, on trouve

$$\sum(\xi'^2_i + \eta'^2_i) = \sum(\xi^2_i + \eta^2_i) \quad = \text{const.},$$

$$\sum\gamma_i(\xi'^2_i + \eta'^2_i) = -\mu(S'_2 + T'_2) = \text{const.},$$

les sommations étant étendues, soit à toutes les valeurs paires, soit à toutes les valeurs impaires de i. Ce sont les intégrales du n° **144**.

Dans le cas des variables obliques, un des γ est nul; soit

$$\gamma_{2n} = 0;$$

il reste

$$\frac{d\xi'_{2n}}{dt} = \frac{d\eta'_{2n}}{dt} = 0,$$

d'où

$$\xi'_{2n} = \text{const.}, \qquad \eta'_{2n} = \text{const.}$$

Ce sont les intégrales linéaires du n° **149**.

On voit avec quelle facilité on retrouve tous les résultats du Chapitre précédent.

152. Limitation des excentricités et des inclinaisons. — Ces formules nous donnent le moyen de trouver des limites supérieures que les excentricités et les inclinaisons des planètes ne pourront jamais dépasser. (Bien entendu, si l'on tient compte seulement des termes de rang *zéro* et que l'on néglige les puissances supérieures des excentricités et des inclinaisons.)

Nous avons trouvé plus haut les intégrales

$$\xi'^2_i + \eta'^2_i = A^2_i,$$

d'où, pour un angle quelconque ε,

$$|\xi'_i \cos\varepsilon + \eta'_i \sin\varepsilon| < A_i;$$

les A_i sont des constantes que l'on peut regarder comme des données de la question, puisqu'il est aisé de les déduire des valeurs initiales des ξ et des η, et que l'on peut supposer positives.

Si l'on se reporte maintenant aux équations (20) du n° 148, on verra que l'on peut supposer que l'on a

$$\xi_k = \sum C_{ik}\xi'_i, \qquad \xi'_i = \sum D_{ik}\xi_k.$$

J'observe en passant que C_{ik}, de même que D_{ik}, représente le cosinus de l'angle que fait l'ancien axe des ξ_k avec le nouvel axe des ξ'_i; on a donc

$$C_{ik} = D_{ik}.$$

On aura donc

$$\xi_k \cos\varepsilon + \eta_k \sin\varepsilon = \sum C_{ik}(\xi'_i \cos\varepsilon + \eta'_i \sin\varepsilon),$$

et, par conséquent,

$$|\xi_k \cos\varepsilon + \eta_k \sin\varepsilon| < \sum A_i |C_{ik}|.$$

Or je puis toujours trouver un angle ε tel que

$$\xi_k \cos\varepsilon + \eta_k \sin\varepsilon = \sqrt{\xi_k^2 + \eta_k^2}.$$

Il en résulte que

$$\sqrt{\xi_k^2 + \eta_k^2} < \sum A_i |C_{ik}|, \tag{25}$$

ce qui nous fournit une limitation des excentricités et des inclinaisons.

Il est un cas où cette limitation devient illusoire. Nous avons en effet

$$\rho_1 = L_1\left(1 - \sqrt{1 - e^2}\right), \qquad \rho_2 = (L_1 - \rho_1)(1 - \cos i),$$

ou, en négligeant les puissances supérieures des excentricités et des inclinaisons,

$$\rho_1 = L_1 \frac{e^2}{2}, \qquad \rho_2 = L_1 \frac{i^2}{2}.$$

Or

$$L_1 = m'_1 \sqrt{m_1 + m_7}\sqrt{a},$$

a, e et i désignant le grand axe, l'excentricité et l'inclinaison de la première planète.

Il en résulte que

$$\xi_k^2 + \eta_k^2 = 2\rho_k$$

contient en facteurs la masse m'_1 ; cette expression est de l'ordre de cette masse multipliée par le carré de l'excentricité. L'inégalité (25) nous donne donc une limite supérieure du produit $m'_1 e^2$, soit

$$m'_1 e^2 < B,$$

d'où

$$e < \sqrt{\frac{B}{m'_1}}.$$

Si la masse m'_1 est très petite, cette limite supérieure de e pourra être très grande et n'avoir aucune valeur pratique.

Il est donc nécessaire d'examiner en particulier le mouvement d'une petite planète sous l'influence perturbatrice d'une ou plusieurs grosses planètes.

Supposons que la petite planète soit la première planète, c'est-à-dire que m'_1 soit très petit. On aura alors

$$m_1 = m'_1$$

à des infiniment petits près d'ordre supérieur.

On pourra poser alors

$$F = \Phi_0 + m_1 \Phi_1,$$

où Φ_0 dépendra seulement des coordonnées des grosses planètes, ou plutôt de celles des planètes fictives correspondantes, et des dérivées de ces coordonnées par rapport au temps. Quant à la fonction Φ_1, elle dépend des coordonnées de toutes les planètes et des dérivées de ces coordonnées par rapport au temps. La masse m_1 est infiniment petite, mais Φ_0 et Φ_1 sont finies.

Formons maintenant nos expressions R, R_2, R'_2, R''_2, S'_2, T'_2, S''_2, T''_2. Dans chacune de ces expressions, dans S'_2 par exemple, distinguons les termes qui proviennent de Φ_0 et ceux qui proviennent de $m_1 \Phi_1$; les premiers seront finis, les autres seront de l'ordre de m_1.

La fonction S'_2 est un polynome entier par rapport aux n variables excentriques

$$\xi_1, \quad \xi_3, \quad \ldots, \quad \xi_{2n-1}.$$

La première de ces variables se rapporte à la petite planète ; elle est donc de l'ordre de $\sqrt{m_1}$; les autres se rapportent aux grosses planètes et elles sont finies. Soit alors

$$S'_2 = P_2 + P'_2 + 2\xi_1 P_1 + P_0 \xi_1^2,$$

où $P_2 + P'_2$ est un polynome du second degré en

$$\xi_3, \quad \ldots, \quad \xi_{2n-1},$$

P_1 un polynome du premier degré par rapport aux mêmes variables et P_0 une constante.

P_2 représente l'ensemble des termes provenant de Φ_0, et P'_2 celui des termes provenant de $m_1\Phi_1$. Quant aux termes

$$2\xi_1 P_1 + P_0 \xi_1^2,$$

ils proviennent tous de $m_1\Phi_1$, car Φ_0 ne dépend pas des coordonnées de la petite planète, ni par conséquent de ξ_1.

Le polynome P_2 est donc fini, tandis que

$$P'_2 + 2\xi_1 P_1 + P_0 \xi_1^2$$

doit être de l'ordre de m_1. Et comme ξ_1 est de l'ordre de $\sqrt{m_1}$, nous devons conclure : 1° que les coefficients de P_2 et la constante P_0 sont finis ; 2° que les coefficients de P_1 sont de l'ordre de $\sqrt{m_1}$; 3° que les coefficients de P'_2 sont de l'ordre de m_1.

Si donc nous posons

$$P'_2 = m_1 Q'_2, \qquad P_1 = \sqrt{m_1}\, Q_1,$$

d'où

$$S'_2 = P_2 + m_1 Q'_2 + 2\sqrt{m_1}\,\xi_1 Q_1 + P_0 \xi_1^2,$$

les polynomes

$$P_2, \quad Q'_2, \quad Q_1, \quad P_0$$

seront finis.

Nous avons à chercher les axes de la surface du second degré

$$S'_2 = 1.$$

Elle diffère peu de la surface

$$P_2 + P_0 \xi_1^2 = 1.$$

L'un des axes de celle-ci est l'axe des ξ_1, les autres sont perpendiculaires à l'axe des ξ_1. L'un des axes de la surface $S'_2 = 1$ (à part

un cas d'exception dont nous parlerons plus loin) fait donc avec l'axe des ξ_1 un angle très petit de l'ordre de $\sqrt{m_1}$. Si donc nous reprenons nos cosinus directeurs C_{ik}, nous voyons que

$$C_{1,3},\quad C_{1,5},\quad \ldots,\quad C_{1,2n-1},$$
$$C_{3,1},\quad C_{5,1},\quad \ldots,\quad C_{2n-1,1}$$

sont très petits de l'ordre de $\sqrt{m_1}$...

Reprenons alors l'inégalité (25) en l'appliquant à la petite planète ; nous aurons

$$\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2} < \sum A_i |C_{i,1}|.$$

Je dis que le second membre est de l'ordre de $\sqrt{m_1}$. En effet, je dis que A_1 est de l'ordre de $\sqrt{m_1}$; c'est en effet la valeur initiale de

$$\sqrt{\xi_1'^2+\eta_1'^2}.$$

Or

$$\xi_1' = \xi_1 C_{11} + \xi_3 C_{13} + \ldots + \xi_{2n-1} C_{1,2n-1}.$$

La valeur initiale de ξ_1' est de l'ordre de $\sqrt{m_1}$, parce que la valeur initiale de ξ_1 est de l'ordre de $\sqrt{m_1}$ et que $C_{13}, \ldots, C_{1,2n-1}$ sont aussi de l'ordre de $\sqrt{m_1}$. Il en est de même de la valeur initiale de η_1' et, par conséquent, de A_1.

Le premier terme $A_1|C_{11}|$ est donc de l'ordre de $\sqrt{m_1}$ et il en est de même des autres parce que

$$C_{3,1},\quad \ldots,\quad C_{2n-1,1}$$

sont de l'ordre de $\sqrt{m_1}$.

On a donc

$$\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2} < \sqrt{m_1}\,H,$$

H étant fini. Mais on a, comme nous l'avons vu, en négligeant les puissances supérieures des excentricités et celles de la masse m_1,

$$\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2} = e\sqrt{m_1}\sqrt[4]{Ma},$$

où M est la masse du Soleil, a et e le grand axe et l'excentricité de la petite planète. On a donc

$$e < \frac{H}{\sqrt[4]{Ma}},$$

ce qui nous donne, pour l'excentricité, une limite supérieure *finie*.

Il y a cependant un cas où ce qui précède serait en défaut, ce serait celui où la surface du second degré

$$P_2 + P_0 \xi_1^2 = 1$$

aurait deux axes égaux (l'un de ces deux axes étant l'axe des ξ_1). Nous ne pourrions plus affirmer alors que ses axes font des angles très petits avec ceux de $S'_2 = 1$.

Pour nous en rendre compte, supposons $n = 2$ de façon que la surface $S'_2 = 1$ se réduise à une ellipse dans un plan. Cette ellipse différera très peu de l'ellipse $P_2 + P_0 \xi_1^2 = 1$ qui a pour axes les axes de coordonnées. Les axes des deux ellipses différeront très peu les uns des autres et, par conséquent, très peu des axes de coordonnées. Mais, si la seconde ellipse se réduit à un cercle, nous n'aurons plus le droit d'affirmer que les axes d'une ellipse très peu différente de ce cercle sont très peu différents des axes de coordonnées.

On peut arriver aux mêmes résultats d'une autre manière.

Nos équations peuvent prendre la forme suivante :

Nous aurons

$$\frac{d\eta_i}{dt} = \mu \frac{dP_2}{d\xi_i} \qquad (i = 3, 5, \ldots, 2n-1),$$

car les termes P'_2 et $\xi_1 P_1$ sont négligeables devant P_2.

De ces équations et des équations analogues pour les ξ_i, on déduit par le procédé ordinaire les variations séculaires des excentricités des grosses planètes. Alors ξ_i et η_i sont donnés sous la forme d'expressions linéaires par rapport à certains cosinus et sinus de la forme

$$\cos(\gamma t + h), \qquad \sin(\gamma t + h).$$

Il vient ensuite

$$\frac{d\eta_1}{dt} = 2\mu P_1 + 2\mu P_0 \xi_1,$$

ou

$$\frac{d\eta_1}{dt} - 2\mu P_0 \xi_1 = \sum A \cos(\gamma t + h),$$

car P_1 est linéaire par rapport aux ξ_i, et, par conséquent, par rapport aux $\cos(\gamma t + h)$.

On satisfera à cette équation et à sa conjuguée

$$\frac{d\xi_1}{dt} + 2\mu P_0 \eta_1 = \sum A \sin(\gamma t + h)$$

en posant

$$\xi_1 = \alpha \cos(\gamma_0 t + h_0) + \sum \frac{A \cos(\gamma t + h)}{\gamma_0 - \gamma},$$

$$\eta_1 = -\alpha \sin(\gamma_0 t + h_0) - \sum \frac{A \sin(\gamma t + h)}{\gamma_0 - \gamma},$$

où $\gamma_0 = -2\mu P_0$ et où α et h_0 sont des constantes arbitraires.

Cette expression demeurera très petite, à moins que γ_0 ne soit égal à l'un des γ, ce qui correspond au cas où notre surface du second degré aurait deux axes égaux.

Ce que nous venons de dire sur les excentricités s'appliquerait sans changement aux inclinaisons.

Le Verrier a montré, dans le Tome II des *Annales de l'Observatoire,* qu'il existe, entre Jupiter et le Soleil, une position où une petite planète pourrait, sous l'action de Jupiter et de Saturne, acquérir de grandes inclinaisons, parce que le cas d'exception dont nous venons de parler se trouverait réalisé.



CHAPITRE IX.

THÉORIE COMPLÈTE DES PERTURBATIONS SÉCULAIRES.

153. Nous avons ramené la recherche des variations séculaires des excentricités et des inclinaisons, c'est-à-dire la recherche des termes de rang *zéro* des inconnues ξ et η à l'intégration d'un système d'équations canoniques

$$(1) \qquad \frac{d\xi_i}{dt} = -\mu \frac{dR}{d\eta_i}, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = \mu \frac{dR}{d\xi_i},$$

et nous avons vu comment cette intégration pouvait être effectuée quand on négligeait dans R les quatrièmes puissances des ξ et des η.

Je me propose maintenant d'intégrer complètement le système (1). Je vais montrer en effet que les équations (1) peuvent être ramenées à la forme des équations (10) du Chapitre VII et que, par conséquent, tous les théorèmes de ce Chapitre leur sont applicables.

Si nous faisons maintenant le changement de variables du n° 151, nos équations resteront canoniques et deviendront

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi'_i}{dt} = -\mu \dfrac{dR}{d\eta'_i}, \\[2ex] \dfrac{d\eta'_i}{dt} = \mu \dfrac{dR}{d\xi'_i}. \end{cases}$$

154. **Second changement de variables.** — Grâce à la petitesse des excentricités et des inclinaisons, les termes du développement du n° 143

$$(3) \qquad R = R_0 + R_2 + R_4 + \ldots$$

vont rapidement en décroissant. Pour mettre ce fait en évidence,

on peut faire un nouveau changement de variables qui ne nous sert que pour mieux faire saisir certaines analogies, mais qu'il faudrait se garder de faire effectivement dans la pratique. Posons

$$\xi'_i = \varepsilon \xi''_i, \qquad \eta'_i = \varepsilon \eta''_i,$$

ε étant un coefficient de l'ordre des excentricités et des inclinaisons. Posons en outre

$$R = R_0 + \varepsilon^2 S, \qquad R_p = \varepsilon^p S_p,$$

d'où

$$S = S_2 + \varepsilon^2 S_4 + \varepsilon^4 S_6 + \ldots.$$

On voit que S est développable suivant les puissances de ε^2, des ξ'' et des η'', et que S_p est homogène d'ordre p par rapport aux ξ'' et aux η''.

Nos équations deviennent alors

$$(4) \qquad \frac{d\xi''_i}{dt} = -\mu \frac{dS}{d\eta''_i}, \qquad \frac{d\eta''_i}{dt} = \mu \frac{dS}{d\xi''_i}.$$

155. Troisième changement de variables. — Posons maintenant

$$\xi''_i = \sqrt{2\rho''_i}\cos\omega''_i, \qquad \eta''_i = \sqrt{2\rho''_i}\sin\omega''_i;$$

nos équations conserveront la forme canonique et s'écriront

$$(5) \qquad \frac{d\rho''_i}{dt} = -\mu \frac{dS}{d\omega''_i}, \qquad \frac{d\omega''_i}{dt} = \mu \frac{dS}{d\rho''_i}.$$

Nous avons, en reprenant les notations des numéros précédents,

$$R_2 = S'_2 + T'_2 + S''_2 + T''_2 = \varepsilon^2 S_2$$

et

$$-2\mu(S'_2 + S''_2) = \sum \gamma_i \xi'^2_i,$$

$$-2\mu(T'_2 + T''_2) = \sum \gamma_i \eta'^2_i.$$

Nous tirons de là

$$S_2 = -\frac{1}{2\mu}\sum \gamma_i(\xi''^2_i + \eta''^2_i) = -\frac{1}{\mu}\sum \gamma_i \rho''_i.$$

Nous pouvons voir alors l'analogie complète des équations (5) avec les équations (10) du Chapitre VII.

On voit que :

μS	joue le rôle	de	F,
les ρ''	jouent	»	des L,
les ω''	»	»	des λ,
ε^2	joue	»	de μ.

En effet :

1° La fonction S est développable suivant les puissances de ε^2;

2° Pour $\varepsilon^2 = 0$, elle se réduit à S_2 et S_2 ne dépend que des ρ''_i;

3° Il n'y a, en général, entre les dérivées de S_2, aucune relation linéaire à coefficients entiers, puisque les γ_i sont des données empiriques indépendantes.

Cela est vrai du moins quand, toutes les planètes se mouvant dans un même plan, il n'y a lieu de s'inquiéter que des excentricités et non des inclinaisons; mais, s'il y a lieu de tenir compte des inclinaisons, nous avons vu au n° 149 que l'un des γ était nul.

Je montrerai plus loin, au n° 165, comment on peut se tirer de cette difficulté; je me borne à renvoyer à ce numéro afin de ne pas interrompre l'exposition.

4° Enfin S, qui est développable suivant les puissances des ξ'' et des η'', est une fonction périodique des ω''.

156. Tout ce que le Chapitre VII nous a appris au sujet des équations (10) est applicable aux équations (5).

En première approximation, c'est-à-dire en négligeant ε^2 et en réduisant S à S_2, on trouve

$$\frac{d\rho''_i}{dt} = 0, \qquad \frac{d\omega''_i}{dt} = -\gamma_i$$

ou

$$\rho''_i = \text{const.}, \qquad \omega''_i = -\gamma_i t + \text{const.}$$

Ces formules résument les résultats obtenus dans le Chapitre précédent.

On peut pousser l'approximation plus loin et appliquer la méthode de Lagrange; on trouvera ainsi, pour nos inconnues ρ'', ω'', ξ'', η'', des développements de la forme

$$\sum (\varepsilon^2)^\alpha A t^m \cos(\nu t + h),$$

où A et h sont des constantes et où

$$\nu = -\sum k_i \gamma_i,$$

les k_i étant des entiers.

Ce sont les constantes $-\gamma_i$ qui, en effet, jouent ici le rôle des moyens mouvements n_i.

Dans ces développements, remplaçons t par τ quand il est en dehors du signe cos et que l'exposant α de ε^2 n'est pas nul; sous le signe cos, remplaçons νt par $\sum k_i w_i$. Dans le premier terme du développement de ω''_i, où t est en dehors du signe cos, mais où l'exposant α est nul, remplaçons $-\gamma_i t$ par ϖ_i; nous obtiendrons ainsi pour

$$\rho''_i, \quad \omega''_i - w_i, \quad \xi''_i, \quad \eta''_i$$

des développements de la forme

$$\sum (\varepsilon^2)^\alpha \mathrm{A} \tau^m \cos\left(\sum k w + h\right).$$

Ces développements sont ceux du Chapitre VI; on satisfera donc aux équations (5) en y substituant

$$\tau = t + c, \qquad w_i = -\gamma_i t + \varepsilon_i,$$

quelles que soient les constantes c et ε_i.

On y satisfera encore, en vertu du Chapitre VII, en substituant dans les développements

$$\tau = 0, \qquad w_i = -\gamma'_i t + \varpi_i,$$

les γ'_i étant des constantes déterminées légèrement différentes des γ_i, et les ϖ_i des constantes arbitraires d'intégration.

Les γ'_i sont développables suivant les puissances de ε^2 et se réduisent aux γ_i pour $\varepsilon^2 = 0$ (*cf.* n° 131).

L'importance de ce résultat est très grande; nous avons vu en effet qu'en négligeant les puissances supérieures des excentricités et des inclinaisons, Lagrange et Laplace avaient démontré que ces excentricités et ces inclinaisons devaient toujours demeurer très petites, d'où résultait la stabilité du système solaire.

Cela restait-il vrai quand on tenait compte de ces puissances supérieures? On en pouvait douter, car, en appliquant aux équa-

tions (5) la méthode de Lagrange, on voyait s'introduire des termes séculaires. A vrai dire, en prenant la question par une autre voie, on pouvait démontrer que la stabilité subsistait. On l'avait fait en tenant compte de R_4 par une méthode dont nous dirons un mot plus loin, mais on pouvait se demander si l'on y réussirait encore en tenant compte des termes d'ordre supérieur.

Les considérations qui précèdent résolvent complètement la question, en ce sens que le procédé que nous venons d'exposer permet toujours de faire disparaître les termes séculaires.

Les développements

$$\sum (\varepsilon^2)^\alpha A \tau^m \cos\left(\sum k w + h\right) \tag{6}$$

peuvent, comme nous l'avons vu au n° 138, s'obtenir de la façon suivante :

Dans ces développements (6), faisons d'abord $\tau = 0$, puis remplaçons w_i par $w_i + (\gamma_i - \gamma'_i)\tau$, ils deviendront

$$\sum (\varepsilon^2)^\alpha A \cos\left[\sum k w + \sum k \tau (\gamma - \gamma') + h\right].$$

Si l'on développe ensuite suivant les puissances de τ, on retombera sur les développements (6). On comprend mieux ainsi d'où provenaient les termes séculaires qui figurent dans ces développements (6).

Dans les développements (6) figurent $4n$ constantes arbitraires si l'on a $n+1$ corps, c'est-à-dire n planètes. Les coefficients A et h ne dépendent que de ces $4n$ constantes.

On peut choisir pour ces constantes les valeurs initiales

$$\xi_i''^0, \quad \eta_i''^0$$

de nos $4n$ inconnues. Mais, ainsi que je l'ai expliqué au n° 133, il est possible de faire ce choix d'une infinité d'autres manières. Nous verrons bientôt quelle est la plus convenable.

157. Tout ce que nous avons dit jusqu'ici s'applique au cas général des équations (10) du Chapitre VII. Mais nos équations (5) sont d'une forme particulière, d'où résultent pour elles certaines propriétés analogues à celles que nous avons démontrées aux n°s 134 et suivants.

Nous avons vu en effet que S est développable suivant les puissances des ξ'' et des η''. Posons en effet

$$\mu S = \mu S_2 + \varepsilon^2 U$$

de telle façon que μS_2 joue le rôle de F_0 et U celui de F_1.

Soit, d'autre part,

$$\Delta = \frac{d}{d\tau} - \sum \gamma_k \frac{d}{dw_k},$$

de telle façon que $\Delta\xi$ se réduise à $\frac{d\xi}{dt}$ quand on fait

$$t = \tau + c, \qquad w_i = -\gamma_i t + \varepsilon_i.$$

Nos équations deviendront alors

$$(7) \qquad \Delta\xi''_i - \gamma_i \eta''_i = -\varepsilon^2 \frac{dU}{d\eta''_i}, \qquad \Delta\eta''_i + \gamma_i \xi''_i = \varepsilon^2 \frac{dU}{d\xi''_i},$$

analogues aux deux dernières équations (33) du Chapitre VII.

Je choisirai pour nos $4n$ constantes les valeurs moyennes de

$$\xi''_i \cos w_i + \eta''_i \sin w_i,$$
$$\xi''_i \sin w_i - \eta''_i \cos w_i,$$

que je désignerai par E_i et E'_i; je puis supposer d'ailleurs $E'_i = 0$ sans restreindre la généralité. Nos formules contiennent en effet $6n$ constantes arbitraires E_i, E'_i et ϖ_i, c'est-à-dire $2n$ de trop; c'est d'ailleurs ce que nous avons fait au Chapitre VII.

Ce que nous allons chercher à démontrer, c'est que nos développements procèdent suivant les puissances de

$$E_i \cos w_i, \qquad E_i \sin w_i,$$

et nous voyons déjà que l'on a, en première approximation,

$$\xi''_i = E_i \cos w_i, \qquad \eta''_i = E_i \sin w_i.$$

Nous allons le démontrer par une analyse toute semblable à celle du n° 135. Posons

$$X_k = \xi''_k + i\eta''_k, \qquad Y_k = \xi''_k - i\eta''_k,$$

de telle façon que

$$\sum X_k \, dY_k + 2i \sum \xi''_k \, d\eta''_k$$

étant différentielle exacte, nos équations deviennent

$$(7\ bis)\qquad \Delta X_k + i\gamma_k X_k = 2i\varepsilon^2 \frac{dU}{dY_k}, \qquad \Delta Y_k - i\gamma_k Y_k = -2i\varepsilon^2 \frac{dU}{dX_k}.$$

(J'ai remplacé les indices i par les indices k afin d'éviter toute confusion avec $i = \sqrt{-1}$).

Les seconds membres de (7 *bis*) sont développables suivant les puissances des X et des Y. Ce que je me propose de démontrer, c'est que les X et les Y vont être développables suivant les puissances de

$$E_k e^{iw_k}, \qquad Y_k e^{-iw_k}.$$

Cela est vrai en première approximation, où l'on trouve

$$X_k = E_k e^{iw_k}, \qquad Y_k = E_k e^{-iw_k}.$$

Je suppose que cela soit vrai en $(n-1)^{\text{ième}}$ approximation et je me propose de démontrer que cela est vrai en $n^{\text{ième}}$.

Nos équations peuvent s'écrire

$$(8)\qquad \begin{cases} \Delta(X_k e^{-iw_k}) = 2i\varepsilon^2 e^{-iw_k} \dfrac{dU}{dY_k}, \\ \Delta(Y_k e^{iw_k}) = -2i\varepsilon^2 e^{iw_k} \dfrac{dU}{dX_k}, \end{cases}$$

analogues aux équations (39 *bis*) du n° 135.

Les dérivées de U sont développables suivant les puissances des X et des Y; et, comme ces quantités, en $(n-1)^{\text{ième}}$ approximation, sont développables suivant les puissances des $E_k e^{\pm iw_k}$, il en sera de même des dérivées des U.

Nos équations (8) sont donc de la forme

$$\Delta u = v,$$

équation (40) du n° 135, où v est une fonction connue de τ, des E_k et des w_k, de telle façon que $v e^{isw_k}$ soit développable suivant les puissances de τ et des $E_k e^{\pm iw_k}$, le nombre s étant égal à -1 dans la première équation (8) et à $+1$ dans la seconde.

En d'autres termes, on a

$$(9)\qquad v = \sum A \prod (E_j^{q_j}) \tau^m e^{i\sum p_j w_j}.$$

A est un coefficient constant, m un entier; $\prod E_j^{q_j}$ représente

le produit

$$E_1^{q_1} E_2^{q_2} \dots E_{2n}^{q_n}.$$

Les q et les p sont des entiers satisfaisant aux conditions

$$\begin{aligned} q_j &\equiv p_j \pmod 2, & q_j &\geqq |p_j| & (j &\gtrless k), \\ q_k &\equiv p_k - s \pmod 2, & q_k &\geqq |p_k + s|, \end{aligned}$$

analogues aux conditions (42) du n° 135.

Nous avons vu au n° 135 que u sera de la même forme que v à la condition que l'intégration soit conduite de telle sorte que la valeur moyenne de u soit nulle, ou soit égale à un développement de la forme (9).

Cette condition est remplie, car nous conduisons nos intégrations de telle façon que les valeurs moyennes de $X_k e^{-iw_k}$, $Y_k e^{iw_k}$ soient l'une et l'autre égales à E_k; on a donc

$$\begin{aligned} &\text{Val. moy.} \dots \quad X_k e^{-iw_k} = e^{-iw_k}(E_k e^{iw_k}), \\ &\text{Val. moy.} \dots \quad Y_k e^{iw_k} = e^{iw_k}(E_k e^{-iw_k}). \end{aligned}$$

Ces valeurs moyennes sont donc bien de la forme (9); il en est donc de même des inconnues qui jouent le rôle de u dans les équations (8), c'est-à-dire de $X_k e^{-iw_k}$, $Y_k e^{iw_k}$, le nombre s étant égal à $+1$ pour la première, à -1 pour la seconde.

Cela veut dire que X_k et Y_k sont développables suivant les puissances des $E e^{\pm iw}$.

158. Nos équations (5) ne changent pas quand on change

$$\varepsilon, \quad \xi_i'', \quad \eta_i''$$

en

$$\frac{\varepsilon}{h}, \quad h\xi_i'', \quad h\eta_i'',$$

quelle que soit la constante h. Dans ces conditions, les valeurs moyennes E_k et E_k', qui nous servent de constantes d'intégration, se changent en hE_k et en hE_k'.

Nous avons supposé $E_k' = 0$; mais nous voyons que si nous changeons ε en $\frac{\varepsilon}{h}$, E_k en hE_k, nos inconnues ξ_i'' et η_i'' se changent en $h\xi_i''$ et $h\eta_i''$, tandis que

$$\xi_i' = \varepsilon\xi_i'', \qquad \eta_i' = \varepsilon\eta_i''$$

ne changent pas. *Donc* ξ'_i *et* η'_i *sont développables suivant les puissances de* τ *et de*

$$\varepsilon E_k \cos w_k, \quad \varepsilon E_k \sin w_k,$$

les coefficients du développement ne dépendant plus d'ailleurs ni de ε, *ni de* τ, *ni des* E, *ni des* w.

Cette circonstance nous montre bien l'inutilité pratique du changement de variables du n° 154 *qui ne nous a servi que pour faciliter l'exposition.* Nous supposerons donc dans la suite $\varepsilon = 1$.

159. Nos équations ne changent pas quand on change les signes de *toutes* les inconnues ξ'' et η'', car la fonction S ne contient que des termes de degré pair par rapport à ces inconnues.

Changer tous ces signes, c'est changer aussi les signes des valeurs moyennes E_k.

Si donc nous changeons les signes des valeurs moyennes E_k, nous changerons les signes de toutes nos inconnues; d'où cette conséquence :

Les développements des ξ'' *ou des* η'' (ou, en faisant $\varepsilon = 1$, ceux des ξ' ou des η') *suivant les puissances des*

$$E_k \cos w_k, \quad E_k \sin w_k$$

ne contiendront que des termes de degré impair.

Si nous nous rappelons que les ξ et les η sont des fonctions linéaires des ξ' et des η', nous verrons que *les* ξ *et les* η *peuvent se développer suivant les puissances de*

$$\tau, \quad E_k \cos w_k, \quad E_k \sin w_k.$$

On satisfait aux équations du mouvement en faisant dans ces développements

$$\tau = 0, \qquad w_k = -\gamma'_k t + \varpi_k.$$

Alors les ξ *et les* η *sont développables suivant les puissances de*

$$E_k \cos(\gamma'_k t - \varpi_k), \qquad E_k \sin(\gamma'_k t - \varpi_k);$$

les développements ne contiennent que des termes de degré impair.

160. Nous avons vu au Chapitre VII (nº 136) que les n'_i sont développables non seulement suivant les puissances de μ, mais suivant celles de E^2.

De même ici les γ'_i seront, comme les ξ et les η, développables suivant les puissances des

$$E_k \cos w_k, \quad E_k \sin w_k$$

et, comme ils doivent être indépendants des w, suivant les puissances des E_k^2.

Les E_k, quand on suppose $\varepsilon = 1$, sont des quantités très petites de l'ordre des excentricités et des inclinaisons.

Quand on fait $E_k^2 = 0$, les γ'_i se réduisent aux γ_i.

Remarquons que les γ_i, d'après leur définition, sont déjà des quantités très petites de l'ordre de μ; les différences $\gamma'_i - \gamma_i$ seront plus petites encore et de l'ordre de μE^2.

161. **Symétrie.** — J'observe que nos équations ne changent pas quand on change t en $-t$, et η en $-\eta$.

Si donc nous changeons w en $-w$, τ en $-\tau$, sans changer les E_k, les ξ ne changeront pas et les η changeront de signe.

Nous pouvons faire

$$\tau = 0,$$

quitte à faire ensuite

$$w_i = -\gamma'_i t + \varpi_i;$$

alors les développements des ξ suivant les cosinus et les sinus des multiples des w ne contiendront que des cosinus et ceux des η ne contiendront que des sinus. On aura donc

$$(10) \quad \begin{cases} \xi = \sum A \prod (E_j^{q_j}) \cos \sum p_j w_j, \\ \eta = \sum A' \prod (E_j^{q_j}) \sin \sum p_j w_j, \end{cases}$$

où

$$q_j \equiv p_j \pmod 2, \qquad q_j \geq |p_j|.$$

C'est là une conséquence de la symétrie par rapport au plan des $x_1 x_3$.

162. Si l'on fait tourner le système d'un angle quelconque ε au-

tour de l'axe des x_3, nos équations ne changent pas et ξ, η se changent en $\xi\cos\varepsilon + \eta\sin\varepsilon$, $-\xi\sin\varepsilon + \eta\cos\varepsilon$.

Si donc nous augmentons tous les ϖ_j d'une même constante ε, les expressions

$$\xi + i\eta, \quad \xi - i\eta$$

doivent être respectivement multipliées par

$$e^{+i\varepsilon}, \quad e^{i\varepsilon}.$$

On aura donc

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}\cos\left(\sum p_j\varpi_j + \sum p_j\varepsilon\right) + i\mathrm{A}'\sin\left(\sum p_j\varpi_j + \sum p_j\varepsilon\right) \\ &\quad = e^{+i\varepsilon}\left(\mathrm{A}\cos\sum p_j\varpi_j + i\mathrm{A}'\sin\sum p_j\varpi_j\right), \end{aligned}$$

d'où

$$(11) \qquad \mathrm{A} = \mathrm{A}', \qquad \sum p_j = +1,$$

conditions nouvelles auxquelles doivent satisfaire les développements (10).

163. Nos équations ne changent pas non plus quand on change les signes de toutes les variables obliques. C'est là une conséquence de la symétrie par rapport au plan des x_1x_2.

D'après nos conventions, les indices impairs correspondent aux variables excentriques ξ_i et η_i et aux constantes E_k correspondantes; les indices pairs aux variables obliques ξ_i et η_i et aux constantes E_k correspondantes.

Si donc nous changeons les signes de toutes les constantes E_k d'indice pair, les ξ et les η d'indice impair ne changeront pas, les ξ et les η d'indice pair changeront de signe.

Donc, dans les développements (10), les sommes

$$\sum q_j, \quad \sum p_j,$$

étendues à toutes les valeurs paires de l'indice j, sont paires pour les variables excentriques, et impaires pour les variables obliques.

C'est le contraire, en vertu du numéro précédent, pour les mêmes sommes étendues à toutes les valeurs impaires de l'indice j.

164. Intégrales diverses. — Les équations (10) nous donnent les ξ et les η sous la forme de séries ordonnées suivant les puissances croissantes des

$$(12) \qquad E_k \cos w_k, \qquad E_k \sin w_k.$$

On peut résoudre ces équations par rapport aux quantités (12) et l'on trouve alors

$$(13) \qquad \begin{cases} E_k \cos w_k = \varphi_k(\xi, \eta), \\ E_k \sin w_k = \psi_k(\xi, \eta), \end{cases}$$

les seconds membres étant des séries procédant suivant les puissances des ξ et des η. On en déduit les intégrales

$$(14) \qquad \varphi_k^2 + \psi_k^2 = E_k^2 = \text{const.}$$

Nos équations possèdent donc des intégrales développables suivant les puissances des ξ et des η. Supposons que, négligeant les puissances supérieures des ξ et des η, nous réduisions R aux premiers termes de son développement

$$R = R_0 + R_2 + R_4,$$

de sorte que nos équations deviennent

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mu \frac{d(R_2 + R_4)}{d\eta}, \qquad \frac{d\eta}{dt} = \mu \frac{d(R_2 + R_4)}{d\xi}.$$

Négligeons également dans le premier membre de (14) les sixièmes puissances des ξ et des η, et soit

$$V_2 + V_4$$

ce qui reste de ce premier membre après cette réduction (il est clair que ce premier membre ne peut contenir que des termes de degré pair; V_2 et V_4 représentent donc respectivement les termes du deuxième degré et ceux du quatrième).

On aura alors identiquement

$$\sum \left(\frac{dV_2}{d\xi} \frac{dR_2}{d\eta} - \frac{dV_2}{d\eta} \frac{dR_2}{d\xi} \right) = 0,$$

$$\sum \left(\frac{dV_2}{d\xi} \frac{dR_4}{d\eta} - \frac{dV_2}{d\eta} \frac{dR_4}{d\xi} \right) + \sum \left(\frac{dV_4}{d\xi} \frac{dR_2}{d\eta} - \frac{dV_4}{d\eta} \frac{dR_2}{d\xi} \right) = 0.$$

M. Cellérier, de Genève, avait déjà remarqué qu'il existe des polynomes V_2 et V_4 satisfaisant à ces identités.

Cette remarque lui avait déjà fait soupçonner la possibilité de faire disparaître les termes séculaires, possibilité qui vient d'être complètement établie.

165. Au n° 155, j'ai fait observer que, quand les planètes ne se mouvant pas dans un même plan, il y avait lieu de calculer non seulement les perturbations séculaires des excentricités, mais encore celles des inclinaisons, on rencontre une difficulté, provenant de ce qu'un des coefficients γ est nul.

Il est temps de revenir sur cette difficulté et de montrer par quel artifice très simple on peut l'éliminer.

Nous avons vu quelle était la forme des intégrales des aires; elles peuvent s'écrire

$$H = \sum L - \sum \rho \qquad = \text{const.},$$

$$U = \sum \eta_2 \sqrt{L_1 - \rho_1 - \frac{\rho_2}{2}} = \text{const.},$$

$$V = \sum \xi_2 \sqrt{L_1 - \rho_1 - \frac{\rho_2}{2}} = \text{const.}$$

(*cf.* n° 144). Elles subsistent quand on réduit les L, les ρ, les ξ et les η à leurs termes de rang *zéro*. Cela revient en effet à développer les inconnues suivant les cosinus et les sinus des multiples des w et suivant les puissances de μ et de $\mu\tau = \tau'$, et à faire ensuite $\mu = 0$, τ' restant fini; les intégrales des aires, vraies pour toutes les valeurs de μ, subsisteront évidemment pour $\mu = 0$.

Choisissons le plan invariable pour plan des $x_1 x_2$; les intégrales U et V seront nulles.

Je dis que, dans les équations (1), nous pouvons alors remplacer R par $R + \alpha U^2 + \alpha V^2$, α étant un coefficient constant quelconque. On a en effet

$$\frac{d(R + \alpha U^2 + \alpha V^2)}{d\xi_i} = \frac{dR}{d\xi_i} + 2\alpha U \frac{dU}{d\xi_i} + 2\alpha V \frac{dV}{d\xi_i} = \frac{dR}{d\xi_i},$$

puisque U et V sont nuls, et de même

$$\frac{d(R + \alpha U^2 + \alpha V^2)}{d\eta_i} = \frac{dR}{d\eta_i}.$$

On obtient ainsi les équations

$$(15)\qquad \frac{d\xi_i}{dt} = -\mu\frac{d(R + \alpha U^2 + \alpha V^2)}{d\eta_i}, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = \mu\frac{d(R + \alpha U^2 + \alpha V^2)}{d\xi_i}.$$

Cela ne veut pas dire que toutes les intégrales de (15) appartiennent à (1) et inversement, mais seulement que le système (15) et le système (1) ont une infinité d'intégrales communes, à savoir celles qui satisfont à la condition $U = V = 0$; nous ne restreignons pas la généralité en nous bornant à envisager ces intégrales.

Cela revient en effet à supposer que le plan invariable est le plan des $x_1 x_2$; et nous pouvons toujours choisir les plans de coordonnées de façon à satisfaire à cette condition.

Comparons maintenant les fonctions

$$R, \quad R + \alpha(U^2 + V^2).$$

Je dis que la seconde de ces fonctions est de la même forme que la première. Elle est en effet développable suivant les puissances des ξ et des η et ne contient que des termes de degré impair par rapport à ces variables.

Envisageons maintenant les termes du second degré; ils s'écrivent

$$R_2 + \alpha\left(\sum \xi_2\sqrt{L_1}\right)^2 + \alpha\left(\sum \eta_2\sqrt{L_1}\right)^2,$$

où

$$R_2 = S'_2 + T'_2 + S''_2 + T''_2.$$

On voit que les quatre expressions

$$S'_2, \quad T'_2,$$

$$S''_2 + \alpha\left(\sum \xi_2\sqrt{L_1}\right)^2, \qquad T''_2 + \alpha\left(\sum \eta_2\sqrt{L_1}\right)^2$$

peuvent jouer le rôle de S'_2, T'_2, S''_2, T''_2, car les deux premières ne dépendent que des variables excentriques, les deux dernières dépendent seulement des variables obliques; d'autre part, la première et la troisième dépendent seulement des ξ, la deuxième et la quatrième seulement des η; enfin la première et la troisième sont formées avec les ξ, comme la deuxième et la quatrième avec les η. La fonction

$$R + \alpha(U^2 + V^2)$$

satisfait d'ailleurs aux mêmes conditions de symétrie que la fonction R.

Les équations (15) sont donc de la forme de celles que nous avons traitées dans ce Chapitre. Seulement la difficulté signalée a disparu. Aucun des coefficients que nous avons appelés γ n'est nul.

Nous pouvons donc appliquer au système (15) toutes les conclusions de ce Chapitre. Ce système est d'ordre $4n$ (s'il y a $n+1$ corps, c'est-à-dire n planètes), et les $4n$ variables ξ et η peuvent se développer suivant les puissances des $4n$ quantités

$$E_k \cos(\gamma'_k t - \varpi_k), \qquad E_k \sin(\gamma'_k t - \varpi_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2n),$$

où les E_k et les ϖ_k sont $4n$ constantes d'intégration.

Il est clair que l'un au moins des coefficients γ'_k dépendra de α, puisque l'un des γ_k dépend de α, et que γ'_k se réduit à γ_k quand toutes les constantes E_k sont nulles (*cf.* n° 160). Soit γ'_{2n} ce coefficient ou l'un de ces coefficients. Nous ne devons conserver que les solutions qui sont communes aux deux systèmes (1) et (15) et pour lesquelles $U = V = 0$. Ces solutions ne doivent pas dépendre de α; elles ne peuvent donc dépendre de l'argument

$$\gamma'_{2n} t - \varpi_{2n},$$

ce qui montre que, pour ces solutions,

$$E_{2n} = 0.$$

D'autre part, ces solutions dépendent encore de $4n-2$ constantes arbitraires, puisque nous ne leur imposons que deux conditions $U = V = 0$, et elles dépendent de $2n-1$ arguments $\gamma'_k t - \varpi_k$, puisque $2n-1$ des γ ne sont pas nuls pour $\alpha = 0$. Donc les autres constantes

$$E_1, \quad E_2, \quad \ldots, \quad E_{2n-1}$$

ne sont pas nulles en général.

166. Reprenons les crochets de Jacobi définis au n° 16, c'est-à-dire posons

$$[\Phi, \Phi'] = \sum \left(\frac{d\Phi}{d\xi_i} \frac{d\Phi'}{d\eta_i} - \frac{d\Phi'}{d\xi_i} \frac{d\Phi}{d\eta_i} \right).$$

Les équations (15) prouvent que

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\mu[\Phi, R + \alpha U^2 + \alpha V^2].$$

De plus, comme H, U et V sont des intégrales de l'équation (1), on aura

$$[H, R] = [U, R] = [V, R] = 0.$$

Il est aisé de vérifier, d'autre part, que l'on a

$$[U, V] = -H, \qquad [U, H] = V, \qquad [V, H] = -U.$$

On conclut de là

$$[H, R + \alpha U^2 + \alpha V^2] = 0,$$

ce qui montre que H est une intégrale des équations (15).

On a donc

$$H = \text{const.}$$

On trouve, d'autre part,

$$\frac{dU}{dt} = 2\alpha\mu HV, \qquad \frac{dV}{dt} = -2\alpha\mu HU,$$

d'où, en se rappelant que H est une constante,

(16) $$U = A\sin(2\alpha\mu Ht + \beta), \qquad V = A\cos(2\alpha\mu Ht + \beta),$$

où A et β sont des constantes d'intégration.

167. Je ne veux pas quitter ce sujet sans avoir expliqué la signification géométrique des équations (15). Pour bien la faire comprendre, supposons que nos inconnues ξ et η soient regardées comme des fonctions de deux variables indépendantes τ et u, définies par les équations différentielles

(17) $$\frac{d\xi}{d\tau} = -\mu\frac{dR}{d\eta}, \qquad \frac{d\eta}{d\tau} = \mu\frac{dR}{d\xi},$$

(18) $$\frac{d\xi}{du} = -\mu\frac{d(U^2 + V^2)}{d\eta}, \qquad \frac{d\eta}{du} = \mu\frac{d(U^2 + V^2)}{d\xi},$$

et la première question qui se pose est celle de savoir si ces deux

systèmes (17) et (18) sont compatibles. Nous trouvons en effet

$$\frac{d^2\xi}{d\tau\, du} = -\mu \frac{d}{du}\left(\frac{dR}{d\eta}\right) = \mu^2 \left[\frac{dR}{d\eta},\ U^2 + V^2\right],$$

$$\frac{d^2\xi}{d\tau\, du} = -\mu \frac{d}{d\tau}\,\frac{d(U^2 + V^2)}{d\eta} = \mu^2 \left[\frac{d(U^2 + V^2)}{d\eta},\ R\right].$$

Ces deux expressions sont-elles identiques? Oui, car les équations (1) admettant $U^2 + V^2$ comme intégrale on a

$$[R,\ U^2 + V^2] = 0.$$

En différentiant cette identité par rapport à η, il vient

$$\left[\frac{dR}{d\eta},\ U^2 + V^2\right] + \left[R,\ \frac{d(U^2 + V^2)}{d\eta}\right] = 0.$$

C. Q. F. D.

Les deux systèmes sont donc compatibles; si alors je fais

$$\tau = t, \qquad u = \text{const.},$$

je retombe sur le système (1), et si je fais

$$\tau = t, \qquad u = \alpha t + \text{const.},$$

je retombe sur le système (15), de telle façon que, de la solution générale du système (17), (18), je déduis immédiatement la solution générale soit du système (1), soit du système (15).

Envisageons en particulier les équations (18) et supposons que, u étant une variable indépendante jouant le rôle du temps, les variations des ξ et des η soient définies par ce système (18); quelle sera la nature de ces variations?

Je considère la figure formée par les $n+1$ corps, ou, si l'on aime mieux, par le Soleil placé à l'origine et par les n planètes fictives définies au Chapitre II et dont nous avons appelé les coordonnées x'_i, et en outre par les vecteurs qui représentent en grandeur et direction les quantités de mouvement de ces planètes fictives et dont nous avons appelé les composantes y'_i.

Soit Φ une fonction quelconque ne dépendant que des distances mutuelles des n planètes fictives et de l'origine et en outre des grandeurs des vecteurs (y'_1, y'_2, y'_3), ..., et des angles que font

ces vecteurs entre eux ou avec les droites qui joignent les n planètes fictives et l'origine. *En un mot, soit* Φ *une fonction indépendante du choix des axes de coordonnées.*

Je dis que l'on aura

$$[\Phi, U^2 + V^2] = 0, \tag{19}$$

car on a

$$[\Phi, H] = [\Phi, U] = [\Phi, V] = 0. \tag{20}$$

Et en effet, pour établir que les équations du problème des trois corps admettent les intégrales des aires, nous nous sommes simplement appuyés sur ce fait que la fonction F était *indépendante du choix des axes*. Donc le système

$$\frac{dx'_i}{dt} = \frac{d\Phi}{dy'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{d\Phi}{dx'_i}$$

admettra les intégrales des aires, ce qui entraîne les égalités (20) et, par conséquent, l'égalité (19).

Mais cette égalité signifie en même temps que Φ est une intégrale des équations (18).

Reprenons alors la figure dont nous venons de parler et qui est formée de l'origine, des planètes fictives et des vecteurs

$$(y'_1, y'_2, y'_3), \quad \ldots.$$

De ces données, on peut déduire les orbites osculatrices des diverses planètes fictives et le vecteur des aires OA dont les composantes sont U, V, H, de sorte que ces orbites et ce vecteur peuvent être regardés comme faisant partie de la figure.

Eh bien, si les variations de cette figure étaient définies par les équations (18), cette figure se déplacerait *à la façon d'un corps solide, sans se déformer,* puisque toute fonction Φ indépendante du choix des axes demeurerait constante.

L'origine, d'ailleurs, dans ce mouvement, demeurerait fixe, de sorte que ce mouvement se réduirait pendant un instant à une rotation autour d'un certain axe instantané OI passant par l'origine.

Pour trouver cet axe, revenons des variables

$$L, \quad \lambda, \quad \xi, \quad \eta$$

aux variables primitives x'_i et y'_i : le système (18) demeurera canonique, puisque le changement de variables qui lient les deux systèmes de variables est un changement canonique.

Observons d'ailleurs que le système (18) devrait naturellement être complété par les équations

$$\frac{dL}{du} = -\mu \frac{d(U^2 + V^2)}{d\lambda}, \qquad \frac{d\lambda}{du} = \mu \frac{d(U^2 + V^2)}{dL}.$$

L'addition de ces équations ne nous gênera pas, puisque $U^2 + V^2$ ne dépend pas des λ; d'où il résulte : 1° que les L sont des constantes; 2° que nous n'avons pas à nous préoccuper de calculer la dérivée $\frac{d\lambda}{du}$.

Si donc nous revenons aux variables x' et y', notre système deviendra

$$(21) \qquad \frac{dx'_i}{du} = \mu \frac{d(U^2 + V^2)}{dy'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{du} = -\mu \frac{d(U^2 + V^2)}{dx'_i}$$

avec

$$U = \sum\nolimits_3 (x'_2 y'_3 - x'_3 y'_2), \qquad V = \sum\nolimits_3 (x'_3 y'_1 - x'_1 y'_3)$$

(*cf.* Chapitre II).

Il vient alors

$$\frac{dx'_1}{du} = 2\mu V x'_3.$$

Si le point x'_1, x'_2, x'_3 est situé sur l'axe OI, on doit avoir

$$\frac{dx'_1}{du} = 0$$

et, par conséquent,

$$x'_3 = 0.$$

Donc l'axe instantané OI est dans le plan des $x_1 x_2$.

D'autre part, le vecteur des aires OA doit être constant en grandeur; sa projection H sur le plan des $x_1 x_2$ est constante également puisque H est une intégrale. Ce vecteur fait donc un angle constant avec l'axe des x_3 et son extrémité A décrit un cercle ayant son centre sur cet axe.

La vitesse de ce point A est donc perpendiculaire d'une part au plan x_0OA, d'autre part au plan IOA. Ce qui prouve que ces deux

plans coïncident et que l'axe instantané OI est la projection du vecteur OA sur le plan des $x_1 x_2$.

L'angle IOA est constant, de sorte que l'axe OI reste constamment sur un cône de révolution C invariablement lié à la figure mobile et ayant pour axe le vecteur OA.

Le mouvement envisagé se réduit donc au roulement de ce cône C sur le plan des $x_1 x_2$.

La signification du système (15) est maintenant bien claire. Soit v la vitesse d'un point quelconque de notre figure à supposer que les variations de cette figure soient définies par le système (1); soit v' cette même vitesse à supposer que ces variations soient définies par le système (18) et que u représente le temps; soit enfin v'' cette même vitesse à supposer que ces variations soient définies par le système (15). Alors la vitesse v'' sera la somme géométrique de v et de $\alpha v'$.

Ou, si l'on préfère, nous pourrons supposer que $+\alpha v'$ représente la vitesse d'un système d'axes mobiles, invariablement lié au cône mobile C, et que v représente la vitesse relative d'un point de notre figure par rapport à ces axes mobiles, en admettant que ce mouvement relatif se fasse conformément à la loi de Newton, c'est-à-dire aux équations (1); alors v'' sera la vitesse absolue.

Nous pouvons, au contraire, regarder les axes fixes comme mobiles et inversement; dans ce cas, notre système (1) représente le mouvement absolu de nos $n+1$ corps obéissant aux lois de Newton, et le système (15) représente le mouvement relatif de ces mêmes corps par rapport à un observateur invariablement lié à un plan qui roule sur un cône de révolution fixe C.

Telle est la signification géométrique cherchée.

168. Introduisons les trois angles d'Euler (*cf.* Appell, *Mécanique rationnelle,* t. II, 2e édition, p. 142) qui définissent la position des trois axes de coordonnées mobiles invariablement liés au cône C, par rapport aux trois axes de coordonnées fixes. Le troisième axe de coordonnées mobiles est précisément la droite OA.

On voit que si nous faisons varier u, τ restant constant, l'angle θ reste constant, les angles φ et ψ varient proportionnellement à u.

Les coordonnées par rapport aux axes fixes seront des fonctions des coordonnées par rapport aux axes mobiles et des trois angles d'Euler. Considérées comme fonction de ces angles, elles seront développables suivant les puissances de

$$(22) \qquad \sin\frac{\theta}{2}\,\frac{\cos}{\sin}\,\frac{\psi-\varphi}{2}, \qquad \cos\frac{\theta}{2}\,\frac{\cos}{\sin}\,\frac{\psi+\varphi}{2}.$$

J'ajouterai qu'elles seront des polynomes homogènes et du second degré par rapport à ces quatre quantités.

De même, revenons à nos inconnues ξ et η. Si nous rapportons le système à nos axes mobiles (je veux dire variables avec u, mais invariables pour u constant), elles satisferont aux équations (1); si, au contraire, nous rapportons le système aux axes fixes et que nous fassions varier à la fois u et τ de telle façon que $\tau = t$, $u = \alpha t +$ const., les inconnues satisferont aux équations (15).

Soient ξ et η les valeurs de ces inconnues, le système étant rapporté aux axes fixes; soient ξ' et η' leurs valeurs, le système étant rapporté aux axes mobiles.

Alors les ξ et les η seront des fonctions des ξ' et η' et des quantités (22); ce sont des polynomes homogènes, d'une part du premier degré par rapport aux ξ' et η', d'autre part du second degré par rapport aux quantités (22).

Or les ξ' et les η' représentent précisément les solutions communes aux systèmes (1) et (15) que nous avons traitées au n° 165. Elles sont donc développables suivant les puissances des expressions

$$E_k \frac{\cos}{\sin} w_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2n-1).$$

Posons

$$\sin\frac{\theta}{2} = E_{2n}, \qquad \frac{\psi-\varphi}{2} = \omega_1, \qquad \frac{\psi+\varphi}{2} = \omega_2 \quad (^1).$$

Comme $\cos\frac{\theta}{2}$ est développable suivant les puissances *paires* de

(1) Inutile de faire observer que les quantités ω_1 et ω_2 introduites dans ce numéro n'ont aucun rapport avec celles que nous avons désignées plus haut par les mêmes lettres. Dans les Chapitres suivants, nous rendrons à ces lettres leur signification primitive.

$\sin\frac{\theta}{2}$, les ξ et les η seront développables suivant les puissances de

$$E_{2n} \frac{\cos}{\sin} \omega_1,$$

et pourront se mettre sous la forme

$$\xi = \sum A\, E_{2n}^{q} \cos\left(\sum k_j w_j + p_1\omega_1 + p_2\omega_2 + h\right),$$

$$\eta = \sum A'\, E_{2n}^{q} \sin\left(\sum k_j w_j + p_1\omega_1 + p_2\omega_2 + h'\right).$$

Les coefficients A, A' sont des constantes qui contiennent d'ailleurs en facteur

$$E_1^{q_1} E_2^{q_2} \ldots E_{2n-1}^{q_{2n-1}}.$$

Nous déterminerons bientôt les constantes h et h'. L'entier positif q_1 est au moins égal à p_1 en valeur absolue. Quant aux entiers p_1 et p_2 ils ne peuvent avoir d'autre valeur que o, ± 1, ± 2.

Reprenons le raisonnement du n° 161 ; nous choisirons des solutions particulières, telles que les valeurs initiales des η' soient nulles pour

$$w_1 = w_2 = \ldots = w_{2n-1} = 0,$$

la symétrie des équations exige que, pour ces solutions, les ξ' ne changent pas et que les η' changent de signe quand les w changent de signe. Ces solutions sont bien celles que nous avons envisagées ; car elles satisfont manifestement à la condition

$$E'_1 = E'_2 = \ldots = E'_{2n-1} = 0.$$

Si donc nous changeons les signes des w et des ω, les ξ' ne changeront pas, et les η' changeront de signe ; par conséquent, à cause de la symétrie des relations qui lient les ξ et les η, aux ξ', η' et ω, *les ξ ne changeront pas et les η changeront de signe.* Cela revient à dire que h et h' sont nuls.

Reprenons maintenant le raisonnement du n° 162.

Je suppose que l'on fasse tourner le système d'un angle ε, soit autour du troisième axe de coordonnées fixes, soit autour du troisième axe de coordonnées mobiles.

Dans le premier cas

$$w_1, \quad w_2, \quad \ldots, \quad w_{2n-1}$$

ne changeront pas, ψ ne changera pas, φ augmentera de ε, ξ et η devront se changer en

$$\xi \cos \varepsilon - \eta \sin \varepsilon, \qquad -\xi \sin \varepsilon + \eta \cos \varepsilon.$$

D'ailleurs ω_1 et ω_2 se changeront en

$$\omega_1 - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \omega_2 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Cela veut dire que l'on doit avoir

$$A = A', \qquad \frac{p_1 + p_2}{2} = 1.$$

On aura donc l'une des trois solutions

$$p_1 = 2, \quad p_2 = 0; \qquad p_1 = p_2 = 1; \qquad p_1 = 0, \quad p_2 = 2.$$

Faisons maintenant tourner le système autour du troisième axe mobile; tous les ϖ augmenteront de ε; mais si en même temps je fais tourner les axes mobiles d'un angle $-\varepsilon$, c'est-à-dire si je change ψ en $\psi + \varepsilon$, la position du système par rapport aux axes fixes ne changera pas; et les ξ et les η ne changeront pas.

Les ξ et les η ne changeront donc pas si je change ϖ en $\varpi + \varepsilon$, ω_1 en $\omega_1 + \frac{\varepsilon}{2}$, ω_2 en $\omega_2 + \frac{\varepsilon}{2}$. Cela entraîne la conséquence

$$\sum k + \frac{p_1 + p_2}{2} = 0.$$

Introduisons maintenant des arguments auxiliaires

$$\varpi'_i = \varpi_i - 2\omega_2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n - 1),$$
$$\varpi'_{2n} = \omega_1 - \omega_2;$$

on aura, en vertu de la valeur de $\sum k$ trouvée plus haut,

$$\sum k\varpi + p_1\omega_1 + p_2\omega_2 = \sum k_i\varpi'_i + p_1\varpi'_{2n},$$

d'où

$$\xi = \sum A E_{2n}^{q_1} \cos\left(\sum k_i\varpi'_i + p_1\varpi'_{2n}\right),$$

$$\eta = \sum A E_{2n}^{q_1} \sin\left(\sum k_i\varpi'_i + p_1\varpi'_{2n}\right).$$

On voit que les ξ et les η sont développables suivant les puissances de

$$\mathrm{E}_i \frac{\cos}{\sin} \varpi'_i, \qquad \mathrm{E}_{2n} \frac{\cos}{\sin} \varpi'_{2n}.$$

On voit aussi que la somme des coefficients entiers

$$\sum k_i + p_1$$

est égale à $+1$, ce qui est conforme au résultat obtenu au nº 162.

Ces arguments ϖ' varient proportionnellement au temps t, mais, si on les regarde comme des fonctions linéaires des deux variables indépendantes τ et u introduites plus haut, on voit que

$$\varpi'_1, \quad \varpi'_2, \quad \ldots, \quad \varpi'_{2n-1},$$

dépendent à la fois de τ et de u (puisque les ϖ_i dépendent de τ et ω_2 de u) mais que leurs différences ne dépendent que de τ. Quant à ϖ'_{2n}, il ne dépend que de u. Si l'on fait $\mathrm{E}_{2n} = 0$, les termes qui contiennent ϖ'_n disparaissent et il ne reste que les termes pour lesquels $p_1 = q_1 = 0$.

En même temps $\frac{d\omega_2}{du}$ s'annule et ω_2 se réduit à une constante, de sorte que nos expressions ne dépendent plus de α et satisfont à la fois aux équations (1) et aux équations (15).

Ainsi se trouve élucidée complètement la signification géométrique des équations (15), ainsi que leurs relations avec les équations (1).

169. Les considérations precédentes pourraient être considérablement simplifiées en modifiant l'artifice employé. Remplaçons le système (15) par le système

$$(15\ bis) \qquad \frac{d\xi_i}{dt} = -\mu \frac{d(\mathrm{R} + \alpha \mathrm{H})}{d\eta_i}, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = \mu \frac{d(\mathrm{R} + \alpha \mathrm{H})}{d\xi_i}$$

et les systèmes (17) et (18) par les systèmes

$$(17\ bis) \qquad \frac{d\xi}{d\tau} = -\mu \frac{d\mathrm{R}}{d\eta}, \qquad \frac{d\eta}{d\tau} = \mu \frac{d\mathrm{R}}{d\xi},$$

$$(18\ bis) \qquad \frac{d\xi}{du} = -\mu \frac{d\mathrm{H}}{d\eta}, \qquad \frac{d\eta}{du} = \mu \frac{d\mathrm{H}}{d\xi}.$$

On verrait comme plus haut que les deux systèmes (17 *bis*) et (18 *bis*) sont compatibles et que l'on peut déduire la solution des équations (15 *bis*) de celle des équations (17 *bis*) et (18 *bis*) en y faisant

$$\tau = t, \qquad u = \alpha t + \text{const.}$$

On verrait également que la fonction $R + \alpha H$ est tout à fait de même forme que la fonction R, et par conséquent que les équations (15 *bis*) sont tout à fait de même forme que les équations (1) avec cette différence qu'aucun des γ n'étant nul, la difficulté signalée plus haut ne se présente pas.

Quelle est maintenant la signification géométrique des équations (15 *bis*) et d'abord celle des équations (18 *bis*). Celles-ci s'intègrent immédiatement, car elles s'écrivent

$$\frac{d\xi}{du} = \mu\eta, \qquad \frac{d\eta}{du} = -\mu\xi.$$

Elles nous apprennent que, quand la variable u varie proportionnellement au temps, tandis que τ reste constant, tout le système tourne autour de l'axe des x_3 d'un mouvement de rotation uniforme, à la façon d'un corps solide.

Les équations (15 *bis*) représentent donc le mouvement de nos $n+1$ corps rapportés non à des axes fixes, mais à des axes mobiles tournant uniformément autour de l'axe des x_3.

L'une des propriétés des équations (15) ne se retrouve plus ici, car les équations (1) et (15 *bis*) n'ont aucune solution commune. Mais il est aisé de déduire la solution générale des équations (1) de celle des équations (15 *bis*). Soit en effet

$$(23) \qquad \xi = \sum B\cos\left(\sum h_i w_i\right), \qquad \eta = \sum B\sin\left(\sum k_i w_i\right),$$

la solution générale des équations (15 *bis*). En vertu du n° 162, on a

$$\sum k_i = 1.$$

On doit d'ailleurs faire

$$w_i = -\gamma'_i t + \varpi_i.$$

Comment les γ' et les B dépendent-ils de α?

Si je change α en $\alpha+\beta$, la vitesse angulaire de rotation des axes mobiles augmente de $B\mu$, de sorte que ξ et η se changent en

$$\xi \cos\beta\mu t + \eta \sin\beta\mu t, \qquad -\xi \sin\beta\mu t + \eta \cos\beta\mu t,$$

ce qui montre que w_i doit se changer en $w_i - \beta\mu t$. Donc, quand α se change en $\alpha+\beta$, les γ' se changent en $\gamma'+\beta\mu$ et les B ne changent pas. Donc les B sont indépendants de α et les γ' sont des fonctions linéaires de α; de plus leurs différences sont indépendantes de α.

Pour avoir la solution des équations (1), il suffit de faire $\alpha = 0$; nous savons que pour $\alpha = 0$, l'un des γ', à savoir γ'_{2n}, s'annule. Donc, pour $\alpha = 0$, le coefficient γ'_i se change en $\gamma'_i - \gamma'_{2n}$.

Donc, pour trouver la solution des équations (1), il suffit dans les formules (23) de faire

$$w_i = (\gamma'_{2n} - \gamma'_i)t + \varpi_i.$$

Il ne sera pas nécessaire d'ailleurs de former effectivement les équations (15), ou (15 *bis*); on pourra partir des équations (1) et le calcul se poursuivra sans qu'on rencontre aucune difficulté. Si j'ai introduit les équations auxiliaires (15) ou (15 *bis*), c'est pour *démontrer* que ces difficultés ne se présenteront pas. C'est un artifice de démonstration, ce n'est pas un artifice de calcul.

170. **Généralisation.** — Dans tout ce qui précède, la fonction R était supposée d'une forme particulière :

1° Elle ne changeait pas quand on changeait les signes de tous les η, ou encore quand on changeait les signes de toutes les variables obliques. Si l'on renonce à cette condition, tous les résultats subsisteront, sauf ceux des n°s 166 et 163;

2° Elle ne changeait pas quand on changeait ξ et η en

$$\xi \cos\varepsilon - \eta \sin\varepsilon, \qquad \xi \sin\varepsilon + \eta \cos\varepsilon.$$

Si l'on renonce à cette condition, tous les résultats subsistent encore, sauf ceux du n° 162;

3° Elle ne contenait que des termes de degré pair par rapport aux ξ et aux η. Si elle contient des termes de degré 3, 5, 7, ..., *mais pas de terme de degré* 1, tous les résultats subsisteront, sauf ceux du n° 159.

Les ξ et les η seront encore développables suivant les puissances des quantités

$$E_i \,{\cos \atop \sin}\, w_i,$$

mais les développements contiendront non seulement des termes de degré impair, mais encore des termes de degré pair.

4° Enfin, la fonction R_1 était d'une forme particulière.

Qu'arrive-t-il lorsqu'on renonce à cette dernière condition? Soit alors R_2 un polynome *quelconque* homogène et du second degré par rapport aux $4n$ variables ξ et η et soient les équations canoniques

$$(24) \qquad \frac{d\xi_i}{dt} = -\mu \frac{dR_2}{d\eta_i}, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = \mu \frac{dR_2}{d\xi_i}.$$

Ces équations sont linéaires et à coefficients constants.

Elles admettront donc $4n$ solutions de la forme

$$(25) \qquad \xi'_i = \alpha_i^k e^{\lambda_k t}, \qquad \eta'_i = \beta_i^k e^{\lambda_k t},$$

et il reste à déterminer les constantes α_i^k, β_i^k, λ_k; nous trouvons

$$\lambda_k \alpha_i^k = -\mu \frac{dR_2}{d\beta_i^k}, \qquad -\lambda_k \beta_i^k = \mu \frac{dR_2}{d\alpha_i^k}.$$

Je suppose, bien entendu, en écrivant ces équations, que dans R_2 les variables ξ_i et η_i ont été remplacées par α_i^k et β_i^k.

Entre ces $4n$ équations (qui sont linéaires et homogènes par rapport aux α et aux β) j'élimine les $4n$ quantités α et β. J'obtiens ainsi une équation algébrique de degré $4n$ en λ_k dont les racines seront deux à deux égales et de signe contraire.

Soient

$$(26) \qquad \xi''_i = \gamma_{ik} e^{\mu_k t}, \qquad \eta''_i = \delta_{ik} e^{\mu_k t},$$

une autre solution des équations (24), correspondant à une autre racine μ_k de l'équation en λ_k.

A l'aide des deux solutions (25) et (26) formons l'expression

$$(27) \qquad \sum (\xi'_i \eta''_i - \eta'_i \xi''_i).$$

Cette expression est une constante, car sa dérivée s'écrit

$$\sum\left(\xi' \frac{d\eta''}{dt} - \eta' \frac{d\xi''}{dt}\right) - \sum\left(\xi'' \frac{d\eta'}{dt} - \eta'' \frac{d\xi'}{dt}\right),$$

ou

$$\mu \sum\left(\xi' \frac{dR_2}{d\xi''} - \eta' \frac{dR_2}{d\eta''}\right) - \mu \sum\left(\xi'' \frac{dR_2}{d\xi'} - \eta'' \frac{dR_2}{d\eta'}\right),$$

et cette dernière expression est nulle en vertu des théorèmes bien connus sur les formes quadratiques.

D'autre part, cette expression (27) est égale à une constante multipliée par

$$e^{(\mu_k+\lambda_k)t}.$$

Il faut donc ou bien qu'elle soit nulle, ou que $\mu_k + \lambda_h = 0$. Mais, si l'expression (27) était nulle *quelle que soit la racine* μ_k *choisie*, elle serait nulle quand on remplacerait ξ_i'', η_i'' par la solution *générale* des équations (24), puisque cette solution générale est une combinaison linéaire d'expression de la forme (26). On aurait donc entre les ξ et η une relation linéaire et ces variables ne seraient plus indépendantes.

Donc, si nous nous donnons λ_k, nous aurons une racine μ_k telle que $\mu_k + \lambda_k = 0$, c'est-à-dire que les racines de notre équation sont deux à deux égales et de signe contraire. C. Q. F. D.

Prenons donc $\mu_k = -\lambda_k$. L'expression (27) sera une constante différente de *zéro* et nous pourrons, sans restreindre la généralité, supposer que cette constante est égale à 1; posons

$$\xi_i = \sum \alpha_i^k X_k - \sum \gamma_i^k Y_k,$$

$$\eta_i = \sum \beta_i^k X_k - \sum \delta_i^k Y_k.$$

Nous avons $4n$ racines λ_k, nous ne donnerons toutefois à l'indice k que $2n$ valeurs, parce que chaque couple de racines λ_k et $-\lambda_k$ ne doit être pris qu'une fois.

Formons l'expression

$$\sum (\xi_i \, d\eta_i - \eta_i \, d\xi_i).$$

Si j'observe que d'après les propriétés de l'équation (27) on a

$$\sum (\alpha_i^k \delta_i^k - \beta_i^k \gamma_i^k) = \sqrt{-1},$$

$$\sum (\alpha_i^k \delta_j^k - \beta_i^k \gamma_j^k) = 0 \qquad (j \gtrless i),$$

. . . .,

je vois qu'il vient

$$\sum (\xi_i\, d\eta_i - \eta_i\, d\xi_i) = \sqrt{-1} \sum (X_k\, dY_k - Y_k\, dX_k).$$

ce qui montre que

$$\sum \xi\, d\eta - i \sum X\, dY$$

est une différentielle exacte.

Nos équations (24), conservant leur forme canonique, deviendront

$$(24\ bis) \qquad \frac{dX_k}{dt} = i\mu \frac{dR_2}{dY_k}, \qquad \frac{dY_k}{dt} = -i\mu \frac{dR_2}{dX_k}.$$

Or ces équations doivent admettre pour solution

$$X_k = e^{\lambda_k t}, \qquad Y_k = e^{-\lambda_k t}, \qquad X_j = Y_j = 0 \qquad (j \gtrless k).$$

Il faut donc que l'on ait

$$i\mu \frac{dR_2}{dY_k} = \lambda_k X_k, \qquad -i\mu \frac{dR_2}{dX_k} = -\lambda_k Y_k,$$

d'où

$$i\mu R_2 = + \sum \lambda_k X_k Y_k.$$

Soit maintenant

$$\sqrt{2}\, X_k = \xi'_k + i\eta'_k,$$
$$\sqrt{2}\, Y_k = \xi'_k - i\eta'_k.$$

[Je ne donne plus ici aux lettres ξ' et η' la même signification que dans les équations (25)].

On voit que

$$2X_k\, dY_k - 2i\xi'_k\, d\eta'_k$$

est une différentielle exacte et qu'il en est de même par conséquent

de

$$\sum X\,dY + i\sum \xi'\,d\eta$$

et de

$$\sum \xi\,d\eta - \sum \xi'\,d\eta'.$$

Les équations (24) deviennent dès lors

$$\frac{d\xi'}{dt} = -\mu\frac{dR_2}{d\eta'}, \qquad \frac{d\eta'}{dt} = \mu\frac{dR_2}{d\xi'},$$

et l'on a d'ailleurs

$$\mu R_2 = \sum \frac{\lambda_k}{i}\,\frac{\xi_k'^2 - \eta_k'^2}{2}.$$

La fonction R_2 exprimée à l'aide des nouvelles variables est donc ramenée à la même forme que par le changement de variables du n° 151; de sorte que le changement de variables que nous venons de définir et qui est canonique et linéaire, peut remplacer dans le cas général celui du n° 151.

Les quantités $\frac{\lambda_k}{i}$ jouent le rôle des γ_k.

Supposons maintenant que l'on ait

$$R_2 = R_2' + R_2'',$$

où R_2' est de la forme envisagée dans le Chapitre VIII et dans le commencement du Chapitre IX, tandis que R_2'' est très petit. C'est ainsi que les choses se passeront dans toutes les applications que nous pourrions avoir à faire.

Considérons les valeurs des γ_k formées à l'aide de la fonction R_2'; ces γ_k sont tous réels d'après le n° 145 et, si R_2'' était nul, on aurait

$$\lambda_k = \pm i\gamma_k.$$

Supposons d'abord qu'aucun des γ_k ne soit nul. Dans ce cas les λ_k sont rangées par paires; les deux λ_k d'une même paire doivent être imaginaires conjuguées, et en même temps égales et de signe contraire. Nous savons en effet que les λ_k doivent être deux à deux imaginaires conjuguées; et comme elles diffèrent très peu des $i\gamma_k$, ce sont les deux λ_k qui diffèrent très peu de $+i\gamma_k$ et de $-i\gamma_k$ qui sont conjuguées. D'autre part nous savons que les λ_k sont deux à deux égales et de signe contraire; et ce ne peut être là aussi que

les deux λ_k qui diffèrent très peu de $+i\gamma_k$ et de $-i\gamma_k$. Donc λ_k et $-\lambda_k$ sont imaginaires conjuguées; d'où il suit que les deux solutions (25) et (26) sont imaginaires conjuguées et que *notre changement de variable est réel.*

Ce raisonnement ne serait pas applicable au cas où l'un des γ serait nul; parce que deux des racines λ_k et $-\lambda_k$ pourraient être réelles et très voisines de *zéro*. Mais, dans toutes les applications que l'on pourrait avoir à faire au problème des trois corps, on pourra toujours ramener au cas où aucun des γ n'est nul, en employant soit l'artifice du n° 165, soit celui du n° 169.

171. On peut aussi se poser le problème autrement. Supposons que l'on ait

$$R = R' + \mu R'',$$

que R soit de la forme envisagée au début de ce Chapitre; que μ soit un paramètre très petit; que R'' soit *quelconque,* assujetti seulement à être développable suivant les puissances des ξ et des η, mais pouvant contenir des termes de tous les degrés et même de degré *un,* et avec des termes du second degré de forme quelconque.

Les équations (1) deviennent

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mu \frac{dR'}{d\eta} - \mu^2 \frac{dR''}{d\eta}, \qquad \frac{d\eta}{dt} = \mu \frac{dR'}{d\xi} + \mu^2 \frac{dR''}{d\xi}.$$

Nous allons faire le changement de variables du n° 151 puis celui du n° 154, mais en posant en même temps $\mu = \varepsilon^4 \mu'$, de sorte que l'on aura

$$\xi' = \varepsilon \xi'', \qquad \eta' = \varepsilon \eta'', \qquad \mu = \varepsilon^4 \mu',$$

et en écrivant

$$R' = R'_0 + R'_2 + R'_4 + \dots,$$

où R'_k représente l'ensemble des termes de degré k, nous poserons encore

$$R = R'_0 + \varepsilon^2 S, \qquad R'_2 = \varepsilon^2 S_2,$$

$$\mu S = \mu S_2 + \varepsilon^2 U,$$

d'où

$$U = \frac{R'_4 + R'_6 + \dots}{\varepsilon^4} + \mu' R''$$

et

$$\frac{d\xi''}{dt} = -\mu \frac{dS}{d\eta''}, \qquad \frac{d\eta''}{dt} = \mu \frac{dS}{d\xi''}.$$

Nous retombons donc sur les équations du n° 154, et je n'ai presque rien à changer à ce qui en a été dit. La seule différence, c'est que U, qui dans les numéros précédents ne contenait que des termes de degré pair, en contiendra de tous les degrés, mais il n'en résulte aucun changement.

Les ξ et les η restent développables suivant les puissances des

$$E_k \frac{\cos}{\sin} w_k,$$

mais les développements, au lieu de contenir seulement des termes de degré impair, contiendront des termes de degré pair et même de degré *zéro*.

D'ailleurs il est bien entendu que les conclusions des n°s 161, 162, 163 ne subsisteraient que si R'' possédait les mêmes symétries que R'.



CHAPITRE X.

CAS GÉNÉRAL DU PROBLÈME DES TROIS CORPS.

172. Nous avons examiné, dans les Chapitres V et VI, la manière de former des développements qui satisfont aux équations différentielles du mouvement dans le cas général du problème des trois corps. Au Chapitre VII, nous nous sommes attachés à un cas particulier, celui du problème restreint et nous avons montré comment, dans ce cas, on peut faire disparaître les termes séculaires de ces développements.

Aux Chapitres VIII et IX, nous avons fait l'étude spéciale des perturbations séculaires, c'est-à-dire que nous avons cherché à déterminer, dans le cas général du problème des trois corps, les termes de rang *zéro* de nos développements. Nous avons vu que ces termes dépendent d'équations canoniques qui sont de même forme que celles du Chapitre VII, et qui, par conséquent, conduisent à des développements où il est possible de faire disparaître les termes séculaires.

Nous allons maintenant revenir aux développements les plus généraux du Chapitre VI, et montrer qu'on peut y faire disparaître les termes séculaires par des procédés analogues à ceux du Chapitre VII.

Il s'agit d'intégrer les équations canoniques

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= -\frac{dF}{d\lambda}, & \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{dF}{dL},\\ \frac{d\xi}{dt} &= -\frac{dF}{d\eta}, & \frac{d\eta}{dt} &= \frac{dF}{d\xi}. \end{aligned}\right.$$

Nous avons vu au Chapitre VI qu'on peut y satisfaire à l'aide de développements de la forme suivante :

$$(2)\qquad L_i = L_i^0 + \delta L_i, \qquad \lambda_i = w_i + \lambda_i^0 + \delta\lambda_i, \qquad \xi_i = \xi_i^0 + \delta\xi_i, \qquad \eta_i = \eta_i^0 + \delta\eta_i.$$

Les δL, $\delta\lambda$, $\delta\xi$, $\delta\eta$ sont développables suivant les puissances de μ, de τ, des ξ_i^0, des η_i^0 et suivant les cosinus et les sinus des multiples des ϖ, c'est-à-dire qu'ils peuvent être mis sous la forme

$$(3) \qquad \sum \mu^\alpha A \mathfrak{M}_0 \tau^m \cos\left(\sum k\varpi + h\right).$$

Les k sont des entiers; A et h ne dépendent que des constantes L_i^0 et λ_i^0; $\mathfrak{M}_0$ est un monome entier par rapport aux ξ_i^0 et aux η_i^0.

Les δL, $\delta\lambda$, $\delta\xi$, $\delta\eta$ s'annulent pour $\mu = 0$; elles s'annulent également pour $\tau = \varpi_i = 0$, de sorte que les constantes L_i^0, λ_i^0, ξ_i^0, η_i^0 ne sont autre chose que les valeurs initiales de nos inconnues L, λ, ξ, η pour $\tau = \varpi = 0$.

Ces développements (2), (3) satisfont aux équations (1) quand on y fait

$$\tau = t + c, \qquad \varpi_i = n_i t + \varepsilon_i,$$

quelles que soient les constantes c et ε_i.

Cherchons à appliquer à ces développements le procédé du n° 129. Nous sommes partis du théorème du n° 16, qui est résumé dans les formules

$$\sum x\,dy = d\Omega + \sum \Lambda_k\,dx_k - F\,dt,$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = F - \sum x \frac{dF}{dx}.$$

Dans le cas qui nous occupe, le rôle des x est joué par les L et les ξ; celui des y par les λ et les η; celui de F par $-$ F. Nos formules deviennent donc

$$\sum L\,d\lambda + \sum \xi\,d\eta = d\Omega + \sum \Lambda_k\,dx_k + F\,dt,$$

$$(4) \qquad \frac{d\Omega}{dt} = \sum L \frac{dF}{dL} + \sum \xi \frac{dF}{d\xi} - F,$$

analogues aux formules (13) et (14) du Chapitre VII.

Nous pourrons écrire la seconde équation (4) sous la forme

$$(5) \qquad \Delta\Omega = \frac{d\Omega}{d\tau} + \sum n_i \frac{d\Omega}{d\varpi_i} = \sum L \frac{dF}{dL} + \sum \xi \frac{dF}{d\xi} - F,$$

analogue à l'équation (15) du Chapitre VII.

Le second membre de (5) est développable sous la forme (3). L'équation (5) est donc de même forme que l'équation (13) du

Chapitre VI, et l'on en conclut que l'une des solutions de cette équation est encore développable sous la forme (3). Ce sera celle que nous adopterons; nous regarderons donc Ω comme développable sous la forme (3).

Ainsi les quantités $L, \lambda, \xi, \eta, \Omega$ sont des fonctions de τ, des w et des constantes d'intégration $L_i^0, \lambda_i^0, \xi_i^0, \eta_i^0$; mais nous regarderons les λ_i^0 comme des constantes données *une fois pour toutes*, de sorte que nos inconnues seront seulement fonctions de

$$\tau, \quad w_k, \quad L_i^0, \quad \xi_i^0, \quad \eta_i^0.$$

Nous pourrons donc écrire

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum L\,d\lambda - \sum \xi\,d\eta - d\Omega \\ &= H\,d\tau + \sum W_i\,dw_i + \sum C_i\,dL_i^0 + \sum X_i\,d\xi_i^0 - \sum Y_i\,d\eta_i^0. \end{aligned} \right.$$

Dans cette formule (6), les coefficients différentiels H, W_i, C_i, X_i, Y_i sont développables suivant les puissances de τ et suivant les sinus et les cosinus des multiples des w et il en est de même des C_i^0 si l'on pose

$$C_i^0 = C_i + \tau \sum W_k \frac{dn_k}{dL_i^0}.$$

Je puis écrire d'ailleurs plus simplement

$$C_i^0 = C_i + \tau W_i \frac{dn_i}{dL_i^0},$$

puisque

$$n_i = \frac{M_i}{(L_i^0)^3}$$

est fonction de L_i^0 seulement.

Faisons maintenant

$$\tau = t, \qquad w_i = n_i t + \varpi_i,$$

d'où

$$d\tau = dt, \qquad dw_i = n_i\,dt + d\varpi_i + t\,dn_i.$$

On trouvera

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum L\,d\lambda + \sum \xi\,d\eta - d\Omega \\ &= \left(H + \sum W_i n_i\right) dt \\ &\quad + \sum W_i\,d\varpi_i + \sum C_i^0\,dL_i^0 + \sum X_i\,d\xi_i^0 + \sum Y_i\,d\eta_i^0. \end{aligned} \right.$$

en remarquant que C_i^0 se réduit à

$$C_i + t W_i \frac{dn_i}{dL_i^0},$$

ce qui donne

$$C_i^0 \, dL_i^0 = C_i \, dL_i^0 + t W_i \, dn_i.$$

Nos constantes d'intégration qui jouent le rôle des α_k de la formule (4) sont ici les L_i^0, les ε_i, les ξ_i^0, les η_i^0. Donc les W_i, les C_i^0, les X_i, les Y_i qui jouent le rôle des A_k de la formule (4) seront des constantes indépendantes du temps et dépendront seulement des constantes d'intégration.

De plus

$$H + \sum W_i n_i = F$$

sera aussi indépendant du temps en vertu de l'équation des forces vives.

Or les W_i sont développables suivant les puissances de μ et de τ et suivant les cosinus et les sinus des multiples des w; et l'on peut leur appliquer le lemme du n° 107 et le raisonnement du n° 129.

Pour

$$\tau = t, \qquad w_k = n_k t,$$

on a

$$W_i = f_0,$$

où f_0, d'après ce qui précède, est une constante indépendante du temps et ne peut dépendre que des constantes d'intégration

$$L_i^0, \quad \varepsilon_i, \quad \xi_i^0, \quad \eta_i^0.$$

Mais ici les constantes ε_i sont nulles, puisque nous faisons

$$w_k = n_k t.$$

Donc f_0 ne dépendra que des

$$L_i^0, \quad \xi_i^0, \quad \eta_i^0.$$

En vertu du lemme du n° 107, la relation

$$W_i = f_0,$$

qui a lieu pour $\tau = t$, $w_k = n_k t$, aura lieu *identiquement* quelles que soient les valeurs de τ et des w.

Donc W_i ne peut dépendre que des L_i^0, ξ_i^0 et η_i^0.

Il en est de même pour la même raison des

$$C_i^0, \quad X_i, \quad Y_i$$

et aussi de F (et par conséquent de H).

Reprenons l'identité (6) et faisons-y

$$\tau = w_i = 0,$$

et, par conséquent,

$$d\tau = dw_i = 0.$$

Les λ_i, les ξ_i et les η_i se réduiront respectivement à λ_i^0, ξ_i^0 et η_i^0, puisque ces constantes sont, par définition, les valeurs initiales des λ, ξ et η pour $\tau = w = 0$. On aura donc

$$d\lambda = 0,$$

puisque les λ_i^0 sont considérés comme des constantes données une fois pour toutes et

$$d\eta_i = d\eta_i^0.$$

On aura d'ailleurs (puisque τ est nul)

$$C_i = C_i^0,$$

et, si Ω_0 représente la valeur de Ω pour $\tau = w = 0$, notre formule (6) deviendra

$$(8) \qquad \sum \xi_i^0 \, d\eta_i^0 - d\Omega_0 = \sum C_i^0 \, dL_i^0 + \sum X_i \, d\xi_i^0 + \sum Y_i \, d\eta_i^0.$$

Si nous faisons simplement $\tau = 0$, en conservant aux w des valeurs quelconques, C_i est encore égal à C_i^0 et la formule (6) devient

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum L \, d\lambda + \sum \xi \, d\eta - d\Omega \\ &\quad = \sum W_i \, dw_i + \sum C_i^0 \, dL_i^0 + \sum X_i \, d\xi_i^0 + \sum Y_i \, d\eta_i^0. \end{aligned} \right.$$

Il importe de remarquer que les quantités C_i^0, X_i, Y_i ne dépendant pas des w ont mêmes valeurs dans la formule (8) et dans la formule (9). Si donc je retranche ces deux formules l'une de l'autre, je trouve, en faisant passer certains termes d'un membre

dans l'autre.

$$(10) \qquad \sum \mathrm{L}\,d\lambda + \sum \xi\,d\eta - \sum \mathrm{W}\,dw - \sum \xi_i^0\,d\eta_i^0 = d(\Omega - \Omega_0).$$

Cette formule suppose que l'on a fait

$$\tau = 0.$$

Prenons donc nos développements (2) et (3) et faisons-y

$$\tau = 0;$$

ils définissent les L, λ, ξ, η en fonctions des w et des constantes

$$\mathrm{L}_i^0, \quad \xi_i^0, \quad \eta_i^0.$$

Les λ_i^0 sont en effet regardées comme des constantes données une fois pour toutes.

D'ailleurs les W sont des fonctions des L_i^0, ξ_i^0, η_i^0; donc, inversement, les L_i^0 sont des fonctions des W, ξ_i^0, η_i^0, de sorte que finalement les inconnues

$$\mathrm{L}_i, \quad \lambda_i, \quad \xi_i, \quad \eta_i$$

sont fonctions des

$$\mathrm{W}_i, \quad w_i, \quad \xi_i^0, \quad \eta_i^0,$$

et que ces fonctions sont données par les développements (2), (3) (où l'on a fait $\tau = 0$).

Ces développements (2), (3) (avec $\tau = 0$) définissent donc un changement de variables et la formule (10) nous apprend que ce changement de variables est canonique.

Les équations (1) conserveront donc la forme canonique et deviendront

$$(11) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{W}_i}{dt} = -\dfrac{d\mathrm{F}}{dw_i}, & \dfrac{d\xi_i^0}{dt} = -\dfrac{d\mathrm{F}}{d\eta_i^0}, \\[2ex] \dfrac{dw_i}{dt} = \dfrac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{W}_i}, & \dfrac{d\eta_i^0}{dt} = \dfrac{d\mathrm{F}}{d\xi_i^0}. \end{cases}$$

Nous voyons tout de suite que F dépend seulement des L_i^0, ξ_i^0, η_i^0, c'est-à-dire des W_i, ξ_i^0, η_i^0. Donc la dérivée de F par rapport à w_i est nulle et W_i est une constante.

On démontrerait, comme au n° 130, que les lemmes du n° 107 sont applicables.

173. Il faut voir maintenant quelle est la forme de la fonction F. Les développements (2), (3) nous apprennent que

$$L_i,\quad \lambda_i,\quad \xi_i,\quad \eta_i$$

sont développables suivant les puissances de τ, μ, ξ_i^0, η_i^0, les coefficients du développement dépendant d'ailleurs des L_i^0 et des w. Il en est évidemment de même de leurs dérivées et, par conséquent, de

$$\Delta L_i,\quad \Delta\lambda_i,\quad \Delta\xi_i,\quad \Delta\eta_i.$$

Il en est de même de F (considérée comme fonction des L_i^0, ξ_i^0, η_i^0, μ). Il en est donc de même de

$$\sum L\frac{dF}{dL}+\sum\xi\frac{dF}{d\xi}-F=\sum L\,\Delta\lambda+\sum\xi\,\Delta\eta-F,$$

c'est-à-dire de $\Delta\Omega$; il en est donc de même de Ω et par conséquent aussi de

$$W_i=\sum L\frac{d\lambda}{dw_i}+\sum\xi\frac{d\eta}{dw_i}-\frac{d\Omega}{dw_i}.$$

On voit donc que W_i, qui ne dépend pas de τ ni des w, sera développable suivant les puissances des ξ_i^0, η_i^0 et de μ, les coefficients du développement dépendant d'ailleurs des L_i^0.

Si nous faisons $\mu=0$, on a

$$L_i=L_i^0,\qquad \frac{d\lambda_i}{dw_i}=1,$$

$$\frac{d\lambda_k}{dw_i}=0\quad (k\gtrless i),\qquad \xi_i=\xi_i^0,\qquad \eta_i=\eta_i^0,\qquad \frac{d\eta}{dw_i}=0,$$

$$F=F_0,\qquad \frac{dF}{d\xi}=0,\qquad \frac{dF}{dL_i}=n_i,$$

d'où

$$\Delta\Omega=\sum n_i L_i^0-F_0=\text{const.},$$

$$\Omega=\left(\sum n_i L_i^0-F_0\right)\tau,$$

$$\frac{d\Omega}{dw_i}=0,$$

d'où enfin

$$W_i=L_i^0.$$

Ainsi le premier terme du développement de W_i suivant les puis-

sances de μ se réduit à L_i^0. Soit, pour μ quelconque

$$W_i = L_i^0 + \delta W_i.$$

δW_i sera développable suivant les puissances de μ, des ξ_k^0 et η_k^0; les coefficients du développement seront des fonctions des L_k^0, *holomorphes dans le domaine envisagé.*

Si donc j'ai

$$\delta W_i = f(\mu, \xi_k^0, \eta_k^0, L_k^0),$$

d'où

$$\delta W_i = f(\mu, \xi_k^0, \eta_k^0, W_k + L_k^0 - W_k),$$

la fonction f sera développable non seulement suivant les puissances des μ, ξ_k^0, η_k^0, mais suivant celles des différences $L_k^0 - W_k$, les coefficients du développement dépendant seulement des W.

Alors notre équation peut s'écrire

$$L_i^0 - W_i + f(\mu, \xi_k^0, \eta_k^0, W_k + L_k^0 - W_k) = 0, \tag{12}$$

et le premier membre est développable suivant les puissances des

$$\mu, \quad \xi_k^0, \quad \eta_k^0, \quad L_k^0 - W_k.$$

Quand on y fait

$$\mu = \xi_i^0 = \eta_i^0 = 0,$$

le premier membre se réduit à $L_i^0 - W_i$ et sa dérivée partielle par rapport à cette différence sera 1.

Donc, en vertu du théorème de Cauchy sur les fonctions implicites, ou, comme aurait dit Laplace, *du théorème sur le retour des suites,* de l'équation (12), on pourra tirer

$$L_i^0 - W_i,$$

et, par conséquent, L_i^0 en série procédant suivant les puissances des μ, ξ_i^0, η_i^0, les coefficients du développement dépendant d'ailleurs des W_i.

Si, dans F, nous substituons ces séries à la place des L_i^0, nous verrons que F est développable suivant les puissances de μ, des ξ_i^0 et des η_i^0, les coefficients de développement dépendant seulement des W.

Telle est la forme de la fonction F.

174. Revenons aux équations (11). Rappelons-nous que, en vertu de ces équations, les W_k sont des constantes, que F ne dépend pas des w, et envisageons spécialement les équations

$$(13) \qquad \frac{d\xi_i^0}{dt} = -\frac{dF}{d\eta_i^0}, \qquad \frac{d\eta_i^0}{dt} = \frac{dF}{d\xi_i^0}.$$

Comparons-les aux équations (1) du Chapitre IX :

$$\frac{d\xi_i}{dt} = -\mu\frac{dR}{d\eta_i}, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = \mu\frac{dR}{d\xi_i}.$$

L'analogie est évidente; F joue le rôle de μR, ξ_i^0 celui de ξ_i, η_i^0 celui de η_i. De plus, F ne dépend pas d'autre variable que des ξ_i^0 et des η_i^0, puisqu'il ne dépend pas des w et que les W sont des constantes. Enfin F est développable suivant les puissances des ξ_i^0 et des η_i^0.

Il y a toutefois une différence. Tandis que μR ne contenait que des termes de degré pair par rapport aux ξ_i et aux η_i, le développement de F contient à la fois des termes de degré pair et des termes de degré impair.

Quelle est la conséquence de cette différence? Au Chapitre IX nous avons supposé que le développement de S commençait par des termes du second degré, ce qui revenait à dire que μR ne contenait pas de termes du premier degré. Mais l'hypothèse que μR ne contient pas de terme de degré 3, 5, 7, ... n'a joué aucun rôle dans nos démonstrations depuis les nos 155, 156, 157, 158. C'est seulement au no 159 que nous l'avons introduite. C'est d'ailleurs ce que nous avons expliqué au no 170.

Les résultats des nos 155, 156, 157, 158 seraient donc applicables à des équations de la forme (13), où F ne contiendrait pas de terme de degré *un* par rapport aux inconnues, mais pourrait contenir des termes de degré 3, 5, 7, ... Avec de pareilles équations, les inconnues seraient développables suivant les puissances d'expressions de la forme

$$(14) \qquad E_k \cos w'_k, \qquad E_k \sin w'_k,$$

où les E_k seraient des constantes d'intégration et les w'_k des variables auxiliaires; pour satisfaire aux équations du mouvement, il faudrait faire

$$w'_k = -\gamma'_k t + \varpi'_k,$$

où les γ' sont des constantes dépendant des E et les ϖ'_k de nouvelles constantes d'intégration.

En revanche, les résultats du n° 159 ne seraient pas applicables, de sorte que les développements contiendraient non seulement des termes de degré impair par rapport aux expressions (14), mais aussi des termes de degré pair. Ils ne contiendraient pas cependant de termes de degré *zéro*. On voit en effet que les équations différentielles sont satisfaites quand toutes les inconnues sont nulles. Les inconnues s'annulent donc toutes à la fois quand les constantes E_k s'annulent toutes à la fois.

Le cas où F contient des termes de degré *un* peut-il être ramené à celui où F ne contient pas de termes de degré *un?* Rien n'est plus facile : il suffit de poser

$$\xi_i^0 = \xi_i'^0 + \alpha_i, \qquad \eta_i^0 = \eta_i'^0 + \beta_i,$$

où $\xi_i'^0$ et $\eta_i'^0$ sont les inconnues nouvelles, α_i et β_i des constantes. Nous déterminerons ces constantes, de telle façon que

$$\frac{dF}{d\xi_i^0} = \frac{dF}{d\eta_i^0} = 0$$

quand on y fait

$$\xi_i^0 = \alpha_i, \qquad \eta_i^0 = \beta_i.$$

Alors, en effet, les dérivées de F s'annulant avec les $\xi_i'^0$ et les $\eta_i'^0$, le développement de F ne contiendra pas de terme de degré *un* par rapport aux $\xi_i'^0$ et aux $\eta_i'^0$.

Ce changement de variables ayant ramené nos équations à la forme que nous avons traitée, nos nouvelles inconnues $\xi_i'^0$ et $\eta_i'^0$ sont développables suivant les puissances des expressions (14); il en sera donc de même des anciennes inconnues ξ_i^0 et η_i^0 qui n'en diffèrent que par des constantes. La seule différence, c'est que les développements des ξ_i^0 et des η_i^0 contiendront des termes de degré *zéro*, tandis que ceux des $\xi_i'^0$ et des $\eta_i'^0$ n'en contiennent pas.

175. Il importe, avant d'aller plus loin, de faire voir que les constantes α_i et β_i sont très petites de l'ordre de μ.

Pour cela, je commence par observer que la valeur moyenne de

$$W_i - L_i$$

est divisible par μ^2. Je rappelle ce que j'entends par *valeur*

moyenne d'un développement procédant suivant les puissances de τ et suivant les sinus et les cosinus des multiples des w. C'est l'ensemble des termes de ce développement qui sont indépendants à la fois de τ et des w.

D'après cette définition, si U est un pareil développement, la valeur moyenne du développement

$$\frac{dU}{dw_i}$$

sera nulle, puisque les termes indépendants des w disparaissent par la différentiation.

Je remarque ensuite que

$$\frac{d\lambda_k}{dw_i} = \frac{d\,\delta\lambda_k}{dw_i} \qquad (i \gtrless k),$$

$$\frac{d\lambda_i}{dw_i} = 1 + \frac{d\,\delta\lambda_i}{dw_i},$$

$$\frac{d\eta_k}{dw_i} = \frac{d\,\delta\eta_k}{dw_i}, \qquad L_k = L_k^0 + \delta L_k, \qquad \xi_k = \xi_k^0 + \delta\xi_k.$$

Il vient donc

$$W_i - L_i = \sum L_k^0 \frac{d\,\delta\lambda_k}{dw_i} + \sum \delta L_k \frac{d\,\delta\lambda_k}{dw_i} + \sum \xi_k^0 \frac{d\,\delta\eta_k}{dw_i} + \sum \delta\xi_k \frac{d\,\delta\eta_k}{dw_i} - \frac{d\Omega}{dw_i}.$$

Or L_k^0, ξ_k^0 sont des constantes, de sorte que les valeurs moyennes de

$$L_k^0 \frac{d\,\delta\lambda_k}{dw_i}, \quad \xi_k^0 \frac{d\,\delta\eta_k}{dw_i}, \quad \frac{d\Omega}{dw_i}$$

sont nulles et que l'on a

$$\text{val. moy.}(W_i - L_i) = \text{val. moy.}\left(\sum \delta L \frac{d\,\delta\lambda}{dw_i} + \sum \delta\xi \frac{d\,\delta\eta}{dw_i}\right).$$

Comme δL, $\delta\lambda$, $\delta\xi$, $\delta\eta$ sont divisibles par μ, nous voyons que la valeur moyenne de $W_i - L_i$ est divisible par μ^2.

C. Q. F. D.

Cela posé, cherchons à exprimer F en fonction des W, des ξ^0 et des η^0 et cela en négligeant μ^2. Nous avons

$$F = F_0 + \mu F_1.$$

Le premier terme F_0 dépend seulement des L_i et, comme $W_i - L_i$ est de l'ordre de μ, nous pouvons écrire

$$F_0(L_i) = F_0(W_i) + \sum \frac{dF_0}{dL_i}(L_i - W_i),$$

en négligeant μ^2; d'ailleurs comme

$$\frac{dF_0}{dL_i} - n_i$$

est de l'ordre de μ, nous pouvons, toujours en négligeant μ^2, écrire

$$F_0(L_i) = F_0(W_i) + \sum n_i(L_i - W_i)$$

et

$$F = F_0(W_i) + \sum n_i(L_i - W_i) + \mu F_1.$$

Dans le dernier terme μF_1, nous pouvons remplacer les inconnues

$$L_i, \quad \lambda_i, \quad \xi_i, \quad \eta_i$$

par leurs valeurs approchées

$$W_i, \quad w_i + \lambda_i^0, \quad \xi_i^0, \quad \eta_i^0.$$

L'erreur commise sera de l'ordre de μ^2.

Comme F est une constante, il est égal à sa valeur moyenne.

Or $F_0(W_i)$ est une constante; la valeur moyenne de $L_i - W_i$ est nulle en négligeant μ^2; celle de F_1 se réduit à R, partie séculaire de la fonction perturbatrice.

Donc

$$(15) \qquad F = \text{val. moy. } F = F_0(W_i) + \mu R.$$

Dans R, il faut remplacer L_i, ξ_i, η_i par W_i, ξ_i^0, η_i^0; je ne parle pas de λ_i qui ne figure pas dans R.

Or nous savons que le développement de R suivant les puissances des ξ et des η ne contient que des termes de degré pair; si donc on négligeait μ^2, il n'y aurait que des termes de degré pair dans le développement de F suivant les puissances des ξ_i^0 et des η_i^0. Ou bien encore, si l'on exprime F en fonction des W_i, ξ_i^0, η_i^0 et si l'on développe suivant les puissances des ξ_i^0 et des η_i^0, les termes

de degré *un* et, en général, les termes de degré impair seront divisibles par μ^2.

Quelles seront alors les valeurs des constantes α_i et β_i? Ce seront les valeurs qui, substituées à la place des ξ_i^0 et des η_i^0, satisfont aux équations

$$\frac{dF}{d\xi_i^0} = 0, \qquad \frac{dF}{d\eta_i^0} = 0.$$

Les premiers membres de ces équations sont divisibles par μ; en effet, pour $\mu = 0$, F se réduit à $F_0(W_i)$, c'est-à-dire à une constante indépendante des ξ_i^0 et des η_i^0. Si donc nous posons

$$F = F_0(W_i) + \mu F',$$

nous pourrons écrire nos équations sous la forme

$$\frac{dF'}{d\xi_i^0} = 0, \qquad \frac{dF'}{d\eta_i^0} = 0;$$

nous aurons ainsi fait disparaître le facteur μ.

Les premiers membres de ces équations sont développables suivant les puissances des ξ_i^0, η_i^0 et de μ. Pour $\mu = 0$, F' se réduit à R, et ne contient plus que des termes de degré pair par rapport aux ξ_i^0 et aux η_i^0; ses dérivées premières s'annulent donc avec les ξ_i^0 et les η_i^0.

Nos équations sont donc satisfaites pour

$$\xi_i^0 = \eta_i^0 = \mu = 0.$$

Nous tirerons donc de nos équations les ξ_i^0 et les η_i^0 en séries procédant suivant les puissances de μ, et ces séries s'annuleront avec μ. Comme les valeurs des ξ_i^0 et η_i^0 ainsi obtenues ne sont autre chose que les constantes α_i et β_i, nous devons conclure que les α_i et les β_i sont des séries procédant suivant les puissances de μ et contenant μ en facteur, que *ces constantes sont par conséquent de l'ordre de* μ.

Si alors, dans notre fonction F qui est développable suivant les puissances de

$$\mu, \quad \xi_i^0, \quad \eta_i^0,$$

nous faisons

$$\xi_i^0 = \xi_i'^0 + \alpha_i, \qquad \eta_i^0 = \eta_i'^0 + \beta_i,$$

il est clair qu'après cette substitution, F sera développable suivant

les puissances de

$$\mu, \quad \xi_i'^0, \quad \eta_i'^0.$$

176. Reprenons maintenant la dernière équation (11) :

$$\frac{dw_i}{dt} = \frac{dF}{dW_i}.$$

Le second membre dépend seulement des

$$W_i, \quad \xi_i^0, \quad \eta_i^0.$$

Ces quantités viennent d'être déterminées et l'on a trouvé que les W_i sont des constantes et que les ξ_i^0 et les η_i^0 sont développables suivant les puissances des expressions

$$(14) \qquad E_k \cos w_k', \qquad E_k \sin w_k',$$

où les E_k sont des constantes d'intégration et où les w_k' doivent être remplacés par

$$-\gamma_k' t + \varpi_k'.$$

Le second membre est donc connu, de sorte que nous obtiendrons w_i par une simple quadrature.

Le second membre est développable suivant les cosinus et les sinus des multiples des w_k'. Soit n_i' sa valeur moyenne et posons

$$w_i = w_i'' + g_i$$

avec

$$\frac{dw_i''}{dt} = n_i', \qquad \frac{dg_i}{dt} = \frac{dF}{dW_i} - n_i'.$$

Comme $\frac{dF}{dW_i}$ est développable suivant les puissances des expressions (14) et de μ, les coefficients du développement dépendant d'ailleurs des constantes W_k, sa valeur moyenne n_i' sera une constante développable suivant les puissances de μ et des E_k^2 [je dis des E_k^2 parce que n_i' ne doit pas dépendre des w_k' (*cf.* n° 160)].

Quant à la différence

$$\frac{dF}{dW_i} - n_i',$$

elle pourra être mise sous la forme

$$\sum A \cos\left(\sum k_j' w_j' + h\right).$$

où A et h sont des constantes dépendant seulement des W, des E et de μ, et où les k'_j sont des entiers.

Il vient alors

$$w'_i = n'_i t + \varpi_i,$$

les ϖ_i étant de nouvelles constantes d'intégration, et

$$(16)\qquad g_i = -\sum \frac{A \sin\left(\sum k'_j w'_j + h\right)}{\sum k'_j \gamma'_j}.$$

Rappelons que les γ'_j sont divisibles par μ; on pourrait donc craindre que les expressions des g_i ne contiennent μ au dénominateur, si les coefficients A n'étaient pas eux-mêmes divisibles par μ.

Heureusement, c'est ce qui arrive; si nous faisons $\mu = 0$, nous aurons, en vertu de la formule (15),

$$F = F_0(W_i), \qquad \frac{dF}{dW_i} = \frac{dF_0}{dW_i}.$$

Comme $\frac{dF_0}{dW_i}$ est une constante, elle est égale à sa valeur moyenne, de sorte qu'on a

$$\frac{dF}{dW_i} = n'_i$$

et

$$\frac{dg_i}{dt} = 0.$$

Si $\frac{dg_i}{dt}$ s'annule pour $\mu = 0$, c'est qu'il est divisible par μ. Donc tous les coefficients A sont divisibles par μ. Dans l'expression de g_i, le facteur μ disparaît haut et bas, de sorte que cette expression est développable suivant les puissances de μ.

177. Reprenons maintenant les développements (2), (3); nous satisferons aux équations (1) si nous y remplaçons :

1° τ par *zéro;*

2° Les ξ_i^0 et les η_i^0 par leurs développements suivant les puissances des expressions

$$(14)\qquad E_k \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} w'_k, \qquad w'_k = -\gamma'_k t + \varpi'_k,$$

développements qui résultent de l'intégration des équations (13) et qui dépendent d'ailleurs des constantes W_i;

3° Les L_i^0 par leurs valeurs en fonctions des W_i, ξ_i^0, η_i^0; ces valeurs étant développables suivant les puissances des ξ_i^0 et η_i^0 seront également développables suivant celles des expressions (14);

4° Les w_i par

$$w_i'' + g_i = n_i' t + \varpi_i g_i.$$

Le terme général du développement (3) s'écrit

$$\sum \mu^\alpha A \mathfrak{M}_0 \tau^m \cos\left(\sum k_i w_i + h\right).$$

Je puis supposer $m = 0$, puisque je fais dans ce développement $\tau = 0$, et que, par conséquent, les termes qui contiennent un facteur τ disparaissent; si je fais de plus $w_i = w_i'' + g_i$, notre développement deviendra

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum \mu^\alpha A \mathfrak{M}_0 \cos\left(\sum k_i g_i + h\right) \cos\left(\sum k_i w_i''\right) \\ &- \sum \mu^\alpha A \mathfrak{M}_0 \sin\left(\sum k_i g_i + h\right) \sin\left(\sum k_i w_i''\right). \end{aligned}\right.$$

Le monome $\mathfrak{M}_0$ sera développable suivant les puissances des expressions (14); il en sera de même de A, $\cos h$, $\sin h$ qui dépendent des L_i^0; il en sera de même des g_i ainsi qu'il résulte de la formule (16); il en sera donc de même de $\cos\left(\sum k_i g_i\right)$, $\sin\left(\sum k_i g_i\right)$, $\cos\left(\sum k_i g_i + h\right)$, $\sin\left(\sum k_i g_i + h\right)$. Ainsi les coefficients de notre formule (17) sont développables suivant les puissances des expressions (14).

En raisonnant comme au n° 69, on verrait que les développements (3) prennent la forme

$$(18)\qquad \sum \mu^\alpha B E_1^{q_1} E_2^{q_2} \ldots E_{2n}^{q_{2n}} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \left(\sum k_i w_i'' + \sum p_i w_i'\right),$$

les entiers q et p satisfaisant aux conditions

$$q_i \equiv p_i \pmod 2, \qquad q_i \geqq |p_i|.$$

Les coefficients B dépendent d'ailleurs des constantes W_i.

Pour satisfaire aux équations (1), il faut dans les développe-

ments (18) faire

$$w_i' = -\gamma_i' t + \varpi_i', \qquad w_i'' = n_i t + \varpi_i.$$

S'il y a $n+1$ corps, soit n planètes, cette solution renfermera $6n$ constantes arbitraires, à savoir : les n constantes W_i, les $2n$ constantes E_i, les n constantes ϖ_i; les $2n$ constantes ϖ_i'. Je ne parle pas des λ_i^0 que nous regardons comme données une fois pour toutes.

Le système (1) est d'ailleurs d'ordre $6n$.

178. Revenons aux équations (13) et examinons-les de plus près. Nous les avons rapprochées des équations (1) du Chapitre IX et nous avons vu au n° 174 quelles sont les différences; on peut ramener au cas du début du Chapitre IX en combinant l'artifice du n° 170 avec celui du n° 174. Mais il est plus simple d'employer le procédé du n° 171, c'est ce que je vais expliquer.

En nous reportant à la formule (15), nous voyons que l'on a

$$F = F_0(W_i) + \mu R' + \mu^2 R'',$$

où R' n'est autre chose que R où l'on a substitué W_i, ξ_i^0 et η_i^0 à la place de L_i, ξ_i et η_i, tandis que R'' est développable suivant les puissances de μ, ξ_i^0, η_i^0, et dépend en outre des constantes W_i. Les équations (13) deviennent alors

$$(13\ bis)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi_i^0}{dt} = -\mu\dfrac{dR'}{d\eta_i^0} - \mu^2\dfrac{dR''}{d\eta_i^0}, \\[2ex] \dfrac{d\eta_i^0}{dt} = \mu\dfrac{dR'}{d\xi_i^0} + \mu^2\dfrac{dR''}{d\xi_i^0}. \end{cases}$$

Nous reconnaissons là les équations du n° 171, car R' est formé avec les ξ_i^0 et η_i^0 comme R avec les ξ_i et η_i.

Si toutes les planètes se mouvaient dans un même plan, de façon qu'on n'eût pas à tenir compte des inclinaisons, aucun de nos γ ne serait nul, de sorte qu'il n'y aurait aucune difficulté.

Dans le cas où l'on doit tenir compte des inclinaisons et où l'un des γ est nul, on tourne la difficulté par l'un des deux artifices exposés à la fin du Chapitre IX, par exemple par celui du n° 169. On se rappelle qu'il consiste à rapporter le système non à des axes fixes, mais à des axes mobiles tournant uniformément autour de l'axe des x_3.

Soient alors L', λ', ρ', ω' les éléments canoniques osculateurs *rapportées aux axes fixes;* L, λ, ρ, ω les mêmes éléments rapportés aux axes mobiles; on aura

$$L = L', \qquad \rho = \rho', \qquad \lambda = \lambda' + \alpha\mu t, \qquad \omega = \omega' - \alpha\mu t,$$

α étant une constante dépendant de la vitesse de rotation attribuée aux axes mobiles.

On aura les équations canoniques

$$(19) \quad \begin{cases} \dfrac{dL'}{dt} = -\dfrac{dF}{d\lambda'}, & \dfrac{d\rho'}{dt} = -\dfrac{dF}{d\omega'}, \\ \dfrac{d\lambda'}{dt} = \dfrac{dF}{dL'}, & \dfrac{d\omega'}{dt} = \dfrac{dF}{d\rho'}; \end{cases}$$

d'où il est aisé de déduire les suivantes

$$(20) \quad \begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = -\dfrac{d(F + \alpha\mu H)}{d\lambda}, & \dfrac{d\rho}{dt} = -\dfrac{d(F + \alpha\mu H)}{d\omega}, \\ \dfrac{d\lambda}{dt} = \dfrac{d(F + \alpha\mu H)}{dL}, & \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d(F + \alpha\mu H)}{d\rho}, \end{cases}$$

où

$$H = \sum L - \sum \rho$$

est le premier membre de l'une des équations des aires.

J'ajoute que quand j'aurai remplacé L', ρ', λ', ω' par

$$L, \quad \rho, \quad \lambda - \alpha\mu t, \quad \omega + \alpha\mu t,$$

les fonctions F et $F + \alpha\mu H$ dépendront seulement de L, ρ, λ, ω *et pas du temps t*; cela tient à la symétrie particulière de la fonction F (*cf.* n° 169).

Si nous revenons aux variables ξ et η, les équations (20) conserveront leur forme canonique et deviendront

$$(21) \quad \begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = -\dfrac{d(F + \alpha\mu H)}{d\lambda}, & \dfrac{d\xi}{dt} = -\dfrac{d(F + \alpha\mu H)}{d\eta}, \\ \dfrac{d\lambda}{dt} = \dfrac{d(F + \alpha\mu H)}{dL}, & \dfrac{d\eta}{dt} = \dfrac{d(F + \alpha\mu H)}{d\xi}. \end{cases}$$

Nous opérerons sur les équations (21) comme nous avons opéré sur les équations (1). Remplaçons donc dans F et dans H les variables en fonctions des W_i, ξ_i^0, η_i^0, w_i; comme H est une constante, en vertu des intégrales des aires, H ne dépendra pas des w_i, et je

pourrai écrire

$$H = H' + \mu H'',$$

où

$$H' = \sum W_i - \frac{1}{2}\sum[(\xi_i^0)^2 + (\eta_i^0)^2],$$

et où H'' est développable suivant les puissances des μ, ξ_i^0, η_i^0 et dépend en outre des constantes W_i. Les équations (13) deviennent alors

$$(13\ ter)\quad \begin{cases} \dfrac{d\xi_i^0}{dt} = -\mu\dfrac{d(R'+\mu H')}{d\eta_i^0} - \mu^2\dfrac{d(R''+\mu H'')}{d\eta_i^0}, \\[2ex] \dfrac{d\eta_i^0}{dt} = \mu\dfrac{d(R'+\mu H')}{d\xi_i^0} + \mu^2\dfrac{d(R''+\mu H'')}{d\xi_i^0}. \end{cases}$$

Ces équations sont de la forme de celles du n° 171, et les procédés du Chapitre IX peuvent leur être appliqués sans aucune difficulté.

179. Calcul des moyens mouvements. — Je dis que les coefficients n' et γ' (qui jouent un rôle analogue à celui des moyens mouvements) sont développables suivant les puissances du paramètre μ et des constantes E_k^2. C'est ce qui résulte de tout ce qui précède et nous pourrions le démontrer de bien des manières, mais il semble que le mieux soit de raisonner comme il suit.

Les équations (1) doivent être satisfaites quand on fait

$$w_i'' = n_i' t + \varpi_i, \qquad w_k' = \gamma_k' t + \varpi_k',$$

d'où

$$\frac{d}{dt} = \sum n_i' \frac{d}{dw_i''} + \sum \gamma_i' \frac{d}{dw_i'}.$$

Servons-nous de cette dernière formule pour transformer les équations (1). Nous obtiendrons ainsi les deux systèmes d'équations

$$(22)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum n_k' \frac{d\lambda_i}{dw_k''} + \sum \gamma_k' \frac{d\lambda_i}{dw_k'} = \frac{dF}{dL_i}, \\[2ex] \displaystyle\sum n_k' \frac{d\xi_i}{dw_k''} + \sum \gamma_k' \frac{d\xi_i}{dw_k'} = -\frac{dF}{d\eta_i} \end{cases}$$

et

$$(23)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum n_k' \frac{d\lambda_i}{dw_k''} + \sum \gamma_k' \frac{d\lambda_i}{dw_k'} = \frac{dF}{dL_i}, \\[2ex] \displaystyle\sum n_k' \frac{d\eta_i}{dw_k''} + \sum \gamma_k' \frac{d\eta_i}{dw_k'} = \frac{dF}{d\xi_i}. \end{cases}$$

Ce sont deux systèmes d'équations linéaires d'où l'on peut tirer les constantes n' et γ'. En effet l'indice i peut prendre n valeurs (s'il y a n planètes) pour les λ_i, et $2n$ pour les ξ_i et les η_i; l'indice k peut prendre n valeurs pour les n' et les ϖ'' et $2n$ pour les γ' et les ϖ'. Chacun de nos systèmes comprend donc $3n$ équations et $3n$ inconnues.

Les seconds membres des équations (22) et (23), c'est-à-dire les dérivées partielles de F, ainsi que les coefficients, c'est-à-dire les dérivées partielles des λ, ξ et η, sont développables suivant les puissances de

$$\mu, \quad E_k \cos\varpi'_k, \quad E_k \sin\varpi'_k. \tag{24}$$

Les déterminants formés à l'aide de ces équations linéaires seront donc développables de la même manière.

Chacune de nos inconnues se présentera donc sous la forme

$$\frac{P}{X} = \frac{Q}{Y},$$

où P, Q, X, Y sont des séries procédant suivant les puissances des quantités (24). La première expression $\frac{P}{X}$ sera déduite des équations (22) et la seconde expression $\frac{Q}{Y}$ sera déduite des équations (23). En conséquence X et Y sont les déterminants des équations (22) et des équations (23).

Soient X_0 et Y_0 l'ensemble des termes de degré le moins élevé des deux développements X et Y; je dis que, si les deux polynomes X_0 et Y_0 sont premiers entre eux, le développement P sera divisible par X, et Q par Y de sorte que chacune de nos inconnues sera développable suivant les puissances des quantités (24).

C'est là un théorème général, d'ailleurs bien connu et que je vais établir en quelques mots. On aura

$$PY = QX,$$

de sorte que PY est divisible par X; je dis que P est divisible par X. Si en effet P n'était pas divisible par X, on pourra écrire

$$P = RX + S, \tag{25}$$

où R et S sont des développements de même forme que P, Q, X, Y,

et où l'ensemble S_0 des termes de degré le moins élevé du développement S n'est pas divisible par X_0.

Si en effet S_0 était divisible par X_0, on aurait

$$S_0 = MX_0,$$

M étant un polynome homogène, puisque S_0 et X_0 sont des polynomes homogènes. On pourrait alors poser

$$P = (R + M)X + (S - MX),$$

formule analogue à la formule (25) mais où R est remplacé par $R + M$ et S par $S - MX$. Si nous comparons les termes de degré le moins élevé de $S - MX$ à ceux de S, nous voyons que le degré des premiers est plus grand que celui des seconds, car $S_0 - MX_0 = 0$. On pourra donc augmenter sans cesse le degré des termes le moins élevé de S, à moins que l'on n'arrive à un moment où S_0 ne sera plus divisible par X_0. Supposons donc que S_0 ne soit pas divisible par X_0. On aura alors

$$RXY + SY = QX,$$

ce qui veut dire que SY est divisible par X; il faut donc que $S_0 Y_0$ soit divisible par X_0; or cela impossible parce que Y_0 est premier avec X_0 et que S_0 n'est pas divisible par X_0 (pour des polynomes, le théorème a été démontré par Kronecker). Donc P est divisible par X. C. Q. F. D.

Nous sommes donc conduits à rechercher si X_0 est premier avec Y_0 et pour cela, il suffit de démontrer que cela a lieu pour $\mu = 0$. Si nous faisons $\mu = 0$, il reste

$$\lambda_i = \lambda_i^0 + \varpi_i, \qquad \xi_i = \xi_i^0, \qquad \eta_i = \eta_i^0.$$

Or les ξ_i^0 et les η_i^0 ne dépendent que des ϖ' et pas des ϖ'', de sorte que, dans les premiers membres des équations (22) et (23), les $\frac{d\xi}{d\varpi''}$ et $\frac{d\eta}{d\varpi''}$ disparaissent.

Il en résulte que X est le produit de deux déterminants :

1° Celui des $\frac{d\lambda_i}{d\varpi_k''}$ qui est égal à 1, puisque pour $\mu = 0$, $\lambda_i - \varpi_i''$ est indépendant des ϖ'';

2° Celui des $\frac{d\xi_i^0}{dw'_k}$. Nous devons nous borner à en chercher les termes de degré le moins élevé. Remarquons que, pour $\mu = 0$, les ξ_i^0 peuvent être calculées simplement à l'aide des équations (1) du Chapitre IX [c'est-à-dire des équations (13 *bis*) ou (13 *ter*), en supprimant dans les seconds membres les termes en μ^2]. Les ξ_i^0 sont alors développables suivant les puissances des quantités (14). Pour avoir les termes du degré le moins élevé de notre déterminant, il suffit de prendre dans les ξ_i^0 les termes du premier degré; lesquels peuvent se calculer par les procédés du Chapitre VIII. Il faut donc d'abord faire subir aux ξ_i^0 le changement de variables du n° 151, qui est linéaire et canonique; si alors nous appelons $\xi_k'^0$ les nouvelles variables on aura (en nous bornant aux termes du premier degré)

$$\xi_k'^0 = \mathrm{E}_k \cos w'_k, \qquad \frac{d\xi_k'^0}{dw'_k} = -\mathrm{E}_k \sin w'_k = -\eta_k'^0.$$

Ce que nous cherchons c'est le déterminant fonctionnel des ξ_i^0 par rapport aux w'; or il est égal au produit du déterminant fonctionnel des ξ_i^0 par rapport aux $\xi_k'^0$ qui est égal à 1 (puisque le changement de variables du n° 151 n'est qu'un changement de coordonnées rectangulaires) par le déterminant fonctionnel des $\xi_k'^0$ par rapport aux w' qui est égal à

$$\eta_1'^0 \eta_2'^0 \ldots \eta_{2n}'^0.$$

On a donc

$$\mathrm{X}_0 = \eta_1'^0 \eta_2'^0 \ldots \eta_{2n}'^0 = \prod (\mathrm{E}_k \sin w'_k).$$

On trouverait de même

$$\mathrm{Y}_0 = \xi_1'^0 \xi_2'^0 \ldots \xi_{2n}'^0 = \prod (\mathrm{E}_k \cos w'_k),$$

ce qui montre que X_0 et Y_0 sont premiers entre eux.

Quelques mots pour repousser une objection possible. On pourrait dire que X_0 et Y_0 sont premiers entre eux pour $\mu = 0$, mais qu'il n'est pas certain qu'il en soit de même pour $\mu \gtrless 0$. Il peut se faire en effet que les termes de degré le moins élevé de X et Y, qui sont de degré $2n$ par rapport aux quantités (24) quand on fait $\mu = 0$, soient de degré moindre pour $\mu \gtrless 0$, parce que les termes du degré le moins élevé qui ne seraient d'ailleurs pas premiers entre eux disparaîtraient pour $\mu = 0$.

Pour se mettre à l'abri de cette objection, il suffit de convenir que l'on évaluera le degré de chaque terme en attribuant à $E_k \cos \varpi'_k$, $E_k \sin \varpi'_k$ le degré 1 et à μ le degré q, q étant un entier plus grand que $2n$. On sera certain alors que tous les termes qui contiennent μ en facteur sont au moins de degré $2n$.

Il résulte de tout cela que nos moyens mouvements n' et γ' sont développables suivant les puissances des quantités (24) et, puisque ce sont des constantes indépendantes des ϖ', qu'il sont développables suivant les puissances de μ et des E_k^2.

C. Q. F. D.

Cherchons les valeurs des n' et des γ' pour

$$\mu = 0.$$

Pour $\mu = 0$, on a

$$F = F_0, \quad \frac{dF}{dL_i} = n_i, \quad \frac{dF}{d\xi_i} = \frac{dF}{d\eta_i} = 0, \quad \frac{d\xi_i}{d\varpi'_k} = 0,$$

$$\frac{d\lambda_i}{d\varpi'_i} = 1, \quad \frac{d\lambda_i}{d\varpi'_k} = 0 \quad (k \gtrless i),$$

de sorte que les équations (22) nous donnent d'abord

$$\gamma' = 0$$

et ensuite

$$n'_i = n_i.$$

Donc les γ' contiennent μ en facteur, et les n'_i se réduisent aux n_i pour $\mu = 0$.

Voyons ce que deviennent les $\frac{\gamma'}{\mu}$ pour

$$\mu = E_k^2 = 0.$$

Si nous négligeons μ^2 dans les seconds membres des équations (22) ou (23), nous pourrons écrire

$$\frac{dF}{d\xi_i} = \mu \frac{dF_1}{d\xi_i}, \quad \frac{dF}{d\eta_i} = \mu \frac{dF_1}{d\eta_i}$$

et dans les dérivées partielles de F_1 remplacer

$$L_i, \quad \lambda_i, \quad \xi_i, \quad \eta_i,$$

par leurs valeurs approchées

$$W_i, \quad \lambda_i^0 + w_i'' + g_i, \quad \xi_i^0, \quad \eta_i^0;$$

qui sont exactes à des quantités près de l'ordre de μ.

Les deux membres sont alors développables suivant les sinus et les cosinus des multiples des w'' et des w'. Égalons dans les deux membres les termes qui ne dépendent pas des w'', mais seulement des w'.

Dans les dérivées $\frac{dF_1}{d\xi_i}$, $\frac{dF_1}{d\eta_i}$, les termes qui ne dépendent pas des W'' sont ceux qui ne dépendent pas des λ; ils ne sont donc autre chose que

$$\frac{dR}{d\xi_i}, \quad \frac{dR}{d\eta_i}$$

ou

$$\frac{dR}{d\xi_i^0}, \quad \frac{dR}{d\eta_i^0},$$

puisque l'on peut remplacer ξ_i et η_i par ξ_i^0 et η_i^0.

D'autre part, dans les premiers membres les termes

$$n_k' \frac{d\xi_i}{dw_k''}$$

ne me donneront pas de termes indépendants des w'', puisque les termes de cette nature, qui pourraient exister dans ξ_i, disparaissent par la différentiation.

Enfin, dans les termes

$$\gamma_k' \frac{d\xi_i}{dw_k'},$$

nous pouvons remplacer les ξ_i par ξ_i^0; l'erreur commise sur $\frac{d\xi_i}{dw_k'}$ est de l'ordre de μ; l'erreur commise sur $\gamma_k' \frac{d\xi_i}{dw_k'}$ est donc de l'ordre de μ^2, puisque γ_k' est de l'ordre de μ.

Donc, en négligeant μ^2 et conservant seulement dans les deux membres les termes indépendants des w'', les équations (22) et (23) deviennent

$$-\sum \gamma_k' \frac{d\xi_i^0}{dw_k'} = -\mu \frac{dR}{d\eta_i^0},$$

$$-\sum \gamma_k' \frac{d\eta_i^0}{dw_k'} = \mu \frac{dR}{d\xi_i^0}.$$

Si nous négligeons les puissances supérieures à E_k^2, nous pouvons réduire R à R_2 et écrire

$$-\sum \gamma'_k \frac{d\xi_i^0}{dw_k} = -\mu \frac{dR_2}{d\eta_i^0},$$

$$-\sum \gamma'_k \frac{d\eta_i^0}{dw_k} = \mu \frac{dR_2}{d\xi_i^0}.$$

Ce sont les équations du Chapitre VIII, de sorte que l'on a

$$\gamma'_k = \gamma_k.$$

Nous devons donc conclure que pour

$$E_k^2 = 0$$

les différences $\gamma'_k - \gamma_k$ *sont de l'ordre de* μ^2.

Tout ce que nous avons dit reste d'ailleurs vrai, si l'on est obligé d'employer l'artifice du n° 169 et de remplacer F et R par $F + \alpha\mu H$, et $R + \alpha\mu H$.

Remarquons que l'un des arguments γ'_{2k} est toujours égal à $\alpha\mu$ (et par conséquent à zéro, quand rapportant le système à des axes fixes on fait $\alpha = 0$). Soient en effet, comme au n° 169, U et V les deux premiers membres des équations des aires. On trouve alors aisément

$$\frac{dU}{dt} = \alpha\mu V, \qquad \frac{dV}{dt} = -\alpha\mu U,$$

car les crochets de Poisson

$$[F, U] = [F, V] = 0, \qquad [H, U] = V, \qquad [H, V] = -U.$$

On tire de là

$$U = C\cos(\alpha\mu t + h), \qquad V = C\sin(\alpha\mu t + h),$$

équations qui expriment d'ailleurs que, pour un observateur invariablement lié aux axes mobiles, le vecteur des aires qui est fixe dans l'espace paraîtra décrire un cône de révolution d'un mouvement uniforme; C et h étant des constantes. Comme U et V doivent être développables suivant les sinus et les cosinus des multiples des w' et des w'', cela prouve que $\alpha\mu t + h$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers des w' et des w'', c'est-à-dire que $\alpha\mu$ est une

combinaison linéaire à coefficients entiers des n' et des γ'

$$\alpha\mu = \sum k_i n'_i + \sum k'_i \gamma'_i.$$

En faisant $\mu = 0$, je vois d'abord que les entiers k_i sont nuls ; en faisant ensuite μ très petit, négligeant μ^2 et faisant $E_k^2 = 0$, il reste

$$\alpha\mu = \sum k'_i \gamma_i.$$

Or γ_{2n} est égal à $\alpha\mu$ et il n'y a pas d'autre relation linéaire à coefficients entiers entre les γ et $\alpha\mu$. Donc tous les entiers k'_i sont nuls excepté k'_{2n} qui est égal à 1 ; on a donc

$$\alpha\mu = \gamma_{2n}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

180. Nombre des arguments. — Dans le cas général du problème des $n+1$ corps (n planètes), nous avons n arguments w'' et $2n$ arguments w', en tout $3n$; mais comme γ'_{2n} est nul lorsque l'on rapporte le système à des axes fixes, l'argument w'_{2n} se réduit à une constante. Les coordonnées des $n+1$ corps dépendent donc de $3n-1$ arguments seulement : leurs distances ne dépendent que de $3n-2$ arguments (*vide infra*, n° 193).

Dans le cas où les $n+1$ corps se meuvent dans un même plan, on n'a plus que n arguments w' ; mais aucun des γ' n'est nul ; les coordonnées dépendent donc de $2n$ arguments.

Dans le cas du problème des trois corps, les coordonnées dépendent de 5 arguments si les inclinaisons ne sont pas nulles et de 4 si elles sont nulles ; les distances dépendent de 4 arguments dans le premier cas, de 3 dans le second.

Si l'une des masses est infiniment petite, les autres masses se meuvent conformément aux lois de Képler ; l'un des γ' devient nul, c'est celui d'où dépendrait le mouvement du périhélie de la grosse masse ; nous n'avons donc plus que 4 arguments si l'inclinaison n'est pas nulle et 3 si elle est nulle ; mais les distances mutuelles des trois corps dépendent encore de 4 arguments dans le premier cas, de 3 dans le second. Les équations ne présentent plus en effet la même symétrie et il y a une direction *fixe* qui joue un rôle particulier, c'est la direction du périhélie de la grosse planète.

Passons enfin au cas du problème restreint, et supposons que l'orbite de la grosse planète soit circulaire. Il n'y a plus alors de direction fixe qui joue un rôle particulier puisque le périhélie de cette orbite est indéterminé. Il en résulte que les distances mutuelles des trois corps dépendent seulement de 3 arguments si l'inclinaison est nulle et de 2 si elle n'est pas nulle (*vide infra*, n° 193).



CHAPITRE XI.

THÉORÈME DE POISSON.

181. Comparaison des développements. — En comparant les développements (3) et (18) du Chapitre précédent, on est conduit à des résultats moins simples et moins nets que dans la comparaison des développements correspondants du Chapitre VII. Cependant quelques-uns de ces résultats ne sont pas sans intérêt et, parmi eux, je citerai surtout le célèbre théorème de Poisson sur l'invariabilité des grands axes.

Rappelons la forme des développements (3) et (18) du Chapitre précédent, développements auxquels je donnerai dans ce Chapitre les nos (1) et (2). Le premier s'écrit

$$(1)\qquad \sum \mu^\alpha A\, \mathfrak{M}_0 \tau^m \frac{\cos}{\sin} \sum k_i w_i,$$

et le second

$$(2)\qquad \sum \mu^\alpha B \prod \left(E_k^{q_k}\right) \frac{\cos}{\sin} \left(\sum k_i w_i'' + \sum p_k w_k' \right).$$

L'un et l'autre donnent la valeur de l'une des quantités δL, $\delta\lambda$, $\delta\xi$, $\delta\eta$, le premier quand on y fait

$$\tau = t + c, \qquad w_i = n_i t + \varepsilon_i,$$

le second quand on y fait

$$w_i'' = n_i' t + \varpi_i, \qquad w_k' = -\gamma_k' t + \varpi_k'.$$

D'un autre côté, g_i, ξ_i^0, η_i^0, L_i^0 sont également développables sous la forme (2), de sorte que

$$L_i = L_i^0 + \delta L_i, \qquad \xi_i = \xi_i^0 + \delta\xi_i, \qquad \eta_i = \eta_i^0 + \delta\eta_i$$

sont développables à la fois sous la forme (1) et sous la forme (2), tandis que

$$\lambda_i - w_i = \lambda_i^0 + \delta\lambda_i$$

est développable sous la forme (1) et que

$$\lambda_i - w_i'' = \lambda_i^0 + g_i + \delta\lambda_i$$

est développable sous la forme (2).

Si l'on veut comparer ces deux développements, il faut d'abord choisir les constantes c, ε_i, ϖ, ϖ' de façon qu'ils représentent la *même* solution des équations du mouvement.

Si nous prenons le développement (1) et que nous y fassions

$$\tau = t, \qquad w_i = n_i t,$$

c'est-à-dire si nous attribuons aux constantes c et ε_i la valeur *zéro;* ce développement (1) nous fera connaître la solution particulière des équations du mouvement qui est telle que les inconnues L_i, λ_i, ξ_i, η_i aient comme valeurs initiales L_i^0, λ_i^0, ξ_i^0, η_i^0 pour $t = 0$.

Seulement, ici, il faut prévenir une confusion; dans les développements (1), L_i^0, λ_i^0, ξ_i^0, η_i^0 représentent des constantes, à savoir les valeurs initiales de L_i, λ_i, ξ_i, η_i.

Dans les formules (3) ci-dessous, au contraire, L_i^0, ξ_i^0, η_i^0 ne sont plus des constantes. Je conviendrai donc de représenter par L_i^1, ξ_i^1, η_i^1 les valeurs initiales L_i, ξ_i, η_i.

Nous devons donc choisir les constantes W, E, ϖ et ϖ' de telle façon que le développement (2) représente la même solution. Nous avons les équations

$$(3)\qquad \begin{cases} L_i = L_i^0 + \delta L_i, \\ \lambda_i = \lambda_i^0 + w_i'' + g_i + \delta\lambda_i, \\ \xi_i = \xi_i^0 + \delta\xi_i, \\ \eta_i = \eta_i^0 + \delta\eta_i. \end{cases}$$

Dans ces équations, chacune des expressions δL, $\delta\lambda$, $\delta\xi$, $\delta\eta$ doit être remplacée par le développement (2) correspondant et il en est de même d'ailleurs de g_i, ξ_i^0, η_i^0, L_i^0.

Faisons maintenant $t = 0$, c'est-à-dire

$$w_i'' = \varpi_i, \qquad w_i' = \varpi_i'.$$

Soit

$$g_i^0,\quad \delta^0 L_i,\quad \delta^0\lambda_i,\quad \delta^0\xi_i,\quad \delta^0\eta_i,\quad L_i^{00},\quad \xi_i^{00},\quad \eta_i^{00}$$

ce que deviennent par cette substitution

$$g_i,\quad \delta L_i,\quad \delta\lambda_i,\quad \delta\xi_i,\quad \delta\eta_i,\quad L_i^0,\quad \xi_i^0,\quad \eta_i^0.$$

Comme L_i, λ_i, ξ_i, η_i doivent se réduire à leurs valeurs initiales L_i^{00}, λ_i^0, ξ_i^{00}, η_i^{00}, les équations (3) deviennent

$$(4)\quad \begin{cases} L_i^1 = L_i^{00} + \delta^0 L_i, \\ \xi_i^1 = \xi_i^{00} + \delta^0\xi_i, \qquad \eta_i^1 = \eta_i^{00} + \delta^0\eta_i, \\ \varpi_i = -g_i^0 - \delta^0\eta_i. \end{cases}$$

Telles sont les relations d'où nous devons tirer les constantes

$$W,\quad E,\quad \varpi_i,\quad \varpi'_k$$

en fonctions des valeurs initiales

$$L_i^1,\quad \xi_i^1,\quad \eta_i^1.$$

J'observe d'abord que les seconds membres des équations (4) sont développables suivant les puissances de

$$\mu,\quad E_k\cos\varpi'_k,\quad E_k\sin\varpi'_k$$

et suivant les sinus et les cosinus des multiples des ϖ_i; ce sont d'ailleurs des fonctions holomorphes des W.

Pour $\mu = 0$, les équations se réduisent à

$$(5)\qquad L_i^1 = W_i,\qquad \xi_i^1 = \xi_i^{00},\qquad \eta_i^1 = \eta_i^{00},\qquad \varpi_i = -g_i^0.$$

Dans ξ_i^{00}, η_i^{00}, g_i^0, on a fait $\mu = 0$, et ces quantités, indépendantes des ϖ_i, sont développables suivant les puissances de

$$E_k\cos\varpi'_k,\quad E_k\sin\varpi'_k.$$

De ces relations (5), on peut tirer les

$$E_k\cos\varpi'_k,\quad E_k\sin\varpi'_k$$

sous la forme de séries ordonnées suivant les puissances des ξ_i^1 et des η_i^1 et dépendant d'ailleurs des W_i ou, ce qui revient au même, des L_i^1.

De même, g_i^0, qui est développable suivant les puissances des

$$E_k \cos \varpi'_k, \quad E_k \sin \varpi'_k$$

deviendra développable suivant les puissances des ξ_i^1 et des η_i^1.

Qu'arrive-t-il maintenant pour μ quelconque. Remarquons que les deux membres des équations (4) sont développables suivant les puissances de μ, des ϖ_i, des

$$E_k \cos \varpi'_k, \quad E_k \sin \varpi'_k,$$

et enfin des $W_i - L_i^1$, si l'on remplace W_i par $L_i^1 + (W_i - L_i^1)$, car ce sont des fonctions holomorphes des W_i quand ces variables sont suffisamment voisines de leurs valeurs approchées L_i^1.

Or, que nous apprend le théorème de Cauchy sur le retour des suites (*voir* mon Ouvrage *Sur les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, n° 30)?

Supposons que l'on ait n équations dont les seconds membres sont nuls et dont les premiers membres sont développables suivant les puissances de n fonctions inconnues $z_1, z_2, \ldots, z_n$ et de p variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_p$ et que l'on veuille tirer de ces équations les inconnues z en fonctions des variables x. Le théorème en question nous apprend que les z seront développables suivant les puissances des x, si les équations sont satisfaites quand on fait

$$z = x = 0,$$

et si, pour $z = x = 0$, le déterminant fonctionnel des premiers membres par rapport aux z n'est pas nul.

Cherchons à appliquer ce théorème aux équations (4) et à tirer de ces équations

$$W_i - L_i^1, \quad E_k \cos \varpi'_k, \quad E_k \sin \varpi'_k, \quad \varpi_i,$$

en fonctions de μ, ξ_i^1, η_i^1.

Vérifions d'abord que les équations sont satisfaites pour

$$\mu = \xi_i^1 = \eta_i^1 = \varpi_i = W_i - L_i^1 = E_k \cos \varpi'_k = E_k \sin \varpi'_k = 0.$$

Pour $\mu = 0$, les équations (4) se réduisent aux équations (5); il suffit donc de montrer que ξ_i^{00}, η_i^{00} et g_i^0 s'annulent pour

$$E_k \cos \varpi'_k = E_k \sin \varpi'_k = 0.$$

Nous savons que ξ_i^0 et η_i^0 sont donnés par les équations (13 *bis*) ou (13 *ter*) du Chapitre précédent; comme nous pouvons faire $\mu = 0$, nous pouvons négliger les termes en $\mu^2 R''$ et ces équations se réduisent à

$$\frac{d\xi_i^0}{dt} = -\mu \frac{dR'}{d\eta_i^0}, \qquad \frac{d\eta_i^0}{dt} = \mu \frac{dR'}{d\xi_i^0}.$$

Elles ne sont autre chose, à la différence des notations près, que les équations (1) du Chapitre IX. Donc R' ne contient que des termes de degré pair par rapport aux ξ_i^0 et η_i^0, c'est-à-dire que les développements des ξ_i^0 et η_i^0 ne contiendront que des termes de degré impair par rapport aux

$$E_k \cos w'_k, \quad E_k \sin w'_k.$$

Ils s'annuleront donc pour

$$E_k \cos w'_k = E_k \sin w'_k = 0,$$

c'est-à-dire que les ξ_i^{00} et η_i^{00} s'annuleront pour

$$E_k \cos \varpi'_k = E_k \sin \varpi'_k = 0.$$

Passons à ce qui concerne g_i^0; nous avons trouvé, au n° 176, l'équation

$$\frac{dg_i}{dt} = \frac{dF}{dW_i} - n'_i.$$

Le second membre est développable suivant les puissances des

$$E_k \frac{\cos}{\sin} w'_k$$

et sa valeur moyenne est nulle, de sorte qu'il ne contient que des termes dépendant des w'_k; tous les termes de ce second membre contiennent donc un des E_k en facteur.

L'intégration montre que g_i est de la même forme et, si nous n'ajoutons pas de constante arbitraire, sa valeur moyenne sera également nulle et tous ses termes contiendront un des E_k en facteur.

Donc g_i s'annule avec les $E_k \frac{\cos}{\sin} w'_k$ et g_i^0 avec les $E_k \frac{\cos}{\sin} \varpi'_k$.

C. Q. F. D.

Vérifions maintenant que pour

$$\mu = \xi_i^1 = \eta_i^1 = \varpi_i = W_i - L_i^1 = E_k \cos\varpi'_k = E_k \sin\varpi'_k = 0,$$

le déterminant fonctionnel des équations par rapport aux inconnues

$$\varpi_i, \quad W_i - L_i^1, \quad E_k \cos\varpi'_k, \quad E_k \sin\varpi'_k$$

n'est pas nul.

En effet, pour $\mu = 0$, les équations (4) se réduisent aux équations (5), de sorte que le déterminant fonctionnel cherché se réduit à celui des ξ_i^{00}, η_i^{00} par rapport aux $E_k \frac{\cos}{\sin} \varpi'_k$.

Les ξ_i^{00}, η_i^{00} sont développables suivant les puissances des $E_k \frac{\cos}{\sin} \varpi'_k$, et, si nous voulons la valeur de notre déterminant pour $E_k = 0$, il nous suffira de réduire les développements à leurs termes du premier degré.

Ces termes du premier degré sont ceux que nous avons déterminés au Chapitre VIII, c'est-à-dire que les ξ_i^{00}, η_i^{00} sont liés aux $E_k \cos\varpi'_k$, $E_k \sin\varpi'_k$ par les mêmes relations linéaires que les ξ_i, η_i aux nouvelles variables ξ'_i, η'_i dans le changement de variables du n° 151.

Or le changement de variables est une transformation rectangulaire de coordonnées. Donc son déterminant est égal à *un*.

Notre déterminant fonctionnel est donc égal à *un*.

C. Q. F. D.

Nous devons conclure que l'on peut tirer des équations (4) *les constantes*

$$\varpi_i, \quad W_i, \quad E_k \cos\varpi'_k, \quad E_k \sin\varpi'_k$$

sous la forme de séries ordonnées suivant les puissances de

$$\mu, \quad \xi_i^1, \quad \eta_i^1$$

dépendant d'ailleurs des L_i^1.

Ce résultat m'a demandé d'assez longs discours, bien qu'il soit presque évident.

182. Rappelons quels sont les deux développements qu'il s'agit

d'identifier. Nous avons d'une part

$$(6)\quad \begin{cases} L_i = L_i^1 + \delta L_i, \\ \xi_i = \xi_i^1 + \delta\xi_i, \qquad \eta_i = \eta_i^1 + \delta\eta_i, \\ \lambda_i = \lambda_i^0 + w_i + \delta\lambda_i. \end{cases}$$

Les δL_i, $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$, $\delta\lambda_i$ doivent être remplacés par leurs développements (1) et, dans ces développements eux-mêmes, il convient de remplacer : 1° les arguments w_i par $n_i t$ et τ par t; 2° les constantes L_i^0, ξ_i^0, η_i^0 par L_i^1, ξ_i^1, η_i^1 pour nous conformer au changement de notations que nous avons été obligés d'adopter au numéro précédent afin d'éviter une confusion.

Nous avons d'autre part

$$(7)\quad \begin{cases} L_i = L_i^0 + \delta L_i, \\ \xi_i = \xi_i^0 + \delta\xi_i, \qquad \eta_i = \eta_i^0 + \delta\eta_i, \\ \lambda_i = \lambda_i^0 + w_i'' + g_i + \delta\lambda_i. \end{cases}$$

Les δL_i, $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$, $\delta\lambda_i$ doivent être remplacés par leurs développements (2) ainsi que les L_i^0, ξ_i^0, η_i^0, g_i et, dans ces développements eux-mêmes, il convient de remplacer w_i'' et w_k' par $n_i' t + \varpi_i$, $-\gamma_k' t + \varpi_k'$.

Pour identifier les expressions (6) et (7), nous pouvons opérer de deux manières : nous pouvons adopter les constantes

$$L_i^1, \quad \xi_i^1, \quad \eta_i^1,$$

qui sont celles qui figurent dans les équations (6).

Nous devons alors, dans les équations (7), remplacer les constantes

$$W_i, \quad \varpi_i, \quad E_k \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \varpi_k'$$

par leurs expressions en fonctions des L_i^1, ξ_i^1, η_i^1, expressions que nous avons appris à former au numéro précédent.

Quelle est alors la forme des seconds membres de ces équations? Ce sont des séries procédant suivant les puissances de

$$\mu, \quad E_k \cos w_k', \quad E_k \sin w_k'.$$

Mais comme on a, par exemple,

$$E_k \cos w_k' = E_k \cos\varpi_k' \cos\gamma_k' t + E_k \sin\varpi_k' \sin\gamma_k' t.$$

nous voyons que ce seront des séries procédant suivant les puissances des

$$\mu, \quad E_k \cos \varpi'_k, \quad E_k \sin \varpi'_k,$$

et suivant les sinus et les cosinus des multiples des $\gamma_k t$.

D'autre part, les L_i, ξ_i, η_i, $\lambda_i - w'_i$ sont développables suivant les cosinus et les sinus des multiples des w''_i, et, par conséquent, suivant ceux des ϖ_i et des $n'_i t$.

Enfin, les coefficients de ces développements dépendent encore des W_i.

Or, d'après le numéro précédent, les

$$W_i, \quad \varpi_i, \quad E_k \cos \varpi'_k, \quad E_k \sin \varpi'_k$$

sont développables suivant les puissances des

$$\mu, \quad \xi_i^1, \quad \eta_i^1,$$

et il en est de même évidemment des cosinus et des sinus des multiples des ϖ_i.

Donc les formules (7) *transformées nous donnent*

$$L_i, \quad \xi_i, \quad \eta_i, \quad \lambda_i - n'_i t$$

sous la forme de séries procédant :

1° *Suivant les puissances de*

$$\mu, \quad \xi_i^1, \quad \eta_i^1;$$

2° *Suivant les sinus et cosinus des multiples des*

$$n'_i t, \quad \gamma_k t;$$

3° *Dépendant en outre des* L_i^1.

Le terme général est de la forme

$$A \mu^\alpha \mathfrak{M}_1 \frac{\cos}{\sin} \nu' t,$$

où A dépend seulement des W_i, où $\mathfrak{M}_1$ est développé suivant les puissances des ξ_i^1 et η_i^1 et où

$$\nu' = \sum k_i n'_i - \sum p_k \gamma_k,$$

les k_i et les p_k étant des entiers.

Ce développement n'est pas encore identique au développement (6), parce que le nombre

$$\mu^\alpha \mathfrak{M}_1,$$

qui est un monome entier en μ, ξ_1, η_1, a pour coefficient

$$A \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} \nu t,$$

qui dépend encore de μ, ξ_1 *et* η_1.

En effet, les n'_i et les γ'_k sont développables suivant les puissances de

$$\mu, \quad E_k^2.$$

D'autre part, les

$$E_k^2 = (E_k \cos \varpi'_k)^2 + (E_k \sin \varpi'_k)^2$$

sont développables suivant les puissances de

$$\mu, \quad \xi_1, \quad \eta_1.$$

Donc les n'_i et les γ'_k et, par conséquent, le coefficient ν', seront développables suivant les puissances de

$$\mu, \quad \xi_1, \quad \eta_1.$$

Pour identifier les deux développements, il faut donc encore développer $\cos \nu' t$ ou $\sin \nu' t$ suivant les puissances de ces quantités.

Pour $\mu = 0$, ν' se réduit à

$$\nu = \sum k_i n_i.$$

Il est clair que, par exemple,

$$\cos \nu' t = \cos[\nu t + (\nu' - \nu) t],$$

et peut, par conséquent, se développer suivant les puissances de $(\nu' - \nu)t$; le terme général est égal à un coefficient numérique, multiplié par $\cos \nu t$ ou $\sin \nu t$ et par une puissance de $(\nu' - \nu)t$.

Ensuite $\nu' - \nu$, qui est d'ailleurs divisible par ν, peut se développer suivant les puissances de μ, des ξ_1 et des η_1.

Le terme général du développement (7) ainsi transformé est

alors

$$A \mu^\alpha \mathfrak{M}_1 (\nu - \nu')^m t^m \frac{\cos}{\sin} \nu t.$$

et il doit alors être identique au développement (6).

183. Il est alors aisé de se rendre compte de l'origine des diverses sortes de termes du développement (6), c'est-à-dire du développement obtenu par l'application directe de la méthode de Lagrange.

Les termes séculaires purs sont ceux qui ne contiennent pas le facteur $\cos \nu t$ ou $\sin \nu t$; ce sont donc ceux pour lesquels on a

$$\nu = \sum k_i n_i = 0.$$

Comme nous n'avons entre les n_i aucune relation linéaire à coefficients entiers, cela entraîne

$$k_i = 0,$$

c'est-à-dire que les termes séculaires purs proviennent des termes indépendants des w''_i et dépendant seulement des arguments w'_k.

Si, en effet, ν' est divisible par μ, on ne pourra développer $\cos \nu' t$ suivant les puissances de μ sans le développer en même temps suivant les puissances de t, ce qui fait apparaître des termes séculaires purs.

Quelle différence y a-t-il donc entre le cas actuel et celui du problème restreint traité au Chapitre VII?

Dans les deux cas, nos coordonnées peuvent s'exprimer en fonctions développées suivant les cosinus et les sinus des multiples d'un certain nombre d'arguments variant proportionnellement au temps. Mais, dans le cas actuel, quelques-uns de ces arguments ont un moyen mouvement très lent s'annulant avec μ; dans le cas restreint, au contraire, tous les moyens mouvements étaient finis. Il en résultait que nous n'avions pas de terme en $\cos \nu' t$, avec ν' divisible par μ, et, par conséquent, pas de termes séculaires purs dans le développement de Lagrange.

Les termes qui dépendent des w'', pour lesquels par conséquent le coefficient ν n'est pas nul, nous donneront des termes périodiques et des termes séculaires mixtes.

Quel sera le *rang* des termes ainsi obtenus? Partons d'un terme

$$(8) \qquad A\mu^\alpha \mathfrak{M}_1 \,{\cos \atop \sin}\, \nu' t$$

du développement (7) transformé; il nous donnera des termes de la forme

$$A\mu^\alpha \mathfrak{M}_1 (\nu' - \nu)^m t^m \,{\cos \atop \sin}\, \nu t,$$

et si, en développant $(\nu' - \nu)^m$ suivant les puissances de μ, on trouve

$$(\nu' - \nu)^m = \sum B\mu^\beta,$$

notre terme général deviendra

$$\sum AB\mu^{\alpha+\beta} \mathfrak{M}_1 t^m \,{\cos \atop \sin}\, \nu t.$$

Comme $\nu' - \nu$ est divisible par μ, l'exposant β est au moins égal à m.

Le rang de notre terme général est donc

$$\alpha + \beta - m \geqq \alpha.$$

Comme α ne peut être négatif, nous voyons la raison d'être de ce fait démontré plus haut qu'un terme quelconque est toujours au moins de rang *zéro*.

Ainsi les termes déduits d'un terme de la forme (8) *ont toujours leur rang au moins égal à* α.

On voit qu'on obtiendra les termes de rang *zéro* en faisant $\mu = 0$ dans les équations (7); comme, dans ces conditions, δL, $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\lambda$ s'annulent, il reste

$$L_i = L_i^0, \qquad \xi_i = \xi_i^0, \qquad \eta_i = \eta_i^0, \qquad \lambda_i = \varpi_i'' + g_i + \lambda_i^0.$$

Là L_i^0, ξ_i^0, η_i^0, g_i doivent être remplacés par leurs développements de la forme (2) et, dans ces développements, il faut encore faire $\mu = 0$. On retrouverait naturellement ainsi les résultats du Chapitre IX.

Cherchons l'ensemble des termes séculaires purs, et d'abord en

ce qui concerne les L_i, les ξ_i et les η_i. Ce sont, nous venons de le voir, les termes indépendants des w''.

Mais nous devons nous rappeler comment ont été obtenus les développements (2) : on a pris les développements (1), on y a fait $\tau = 0$, on y a remplacé les ξ_i^0, les η_i^0 et les L_i^0 par leurs valeurs en fonctions des w'_k et des W [valeurs déduites des équations (13) du Chapitre précédent) et enfin on a remplacé les w_i par $w''_i + g_i$.

Dans cette dernière substitution, un terme

$$A \cos \sum k_i w_i$$

donne

$$A \cos \sum k_i w''_i \cos \sum k_i g_i - A \sin \sum k_i w''_i \sin \sum k_i g_i,$$

c'est-à-dire que tous les termes qui en proviennent contiennent en facteur le cosinus ou le sinus de $\sum k_i w''_i$.

Donc un terme indépendant des w_i (c'est-à-dire où les k_i sont nuls) ne nous donnera que des termes indépendants des w''_i et inversement un terme dépendant des w_i ne nous donnera que des termes dépendant des w''_i.

Nous voulons l'ensemble des termes indépendants des w''_i ; pour cela, nous n'avons qu'à prendre l'ensemble des développements (1), à y faire $\tau = 0$, à y supprimer tous les termes dépendant des w, et à y remplacer les L_i^0, ξ_i^0, η_i^0 par leurs développements de la forme (2).

Nous aurons donc

termes séculaires purs de $L_i = L_i^0 +$ val. moy. δL_i,

» $\xi_i = \xi_i^0$ » $\delta \xi_i$,

» $\eta_i = \eta_i^0$ » $\delta \eta_i$.

Je donne au mot de *valeur moyenne* le même sens que dans le Chapitre précédent, c'est-à-dire que je suppose que, ayant développé δL_i, $\delta \xi_i$, $\delta \eta_i$ suivant les puissances de τ et les cosinus et sinus des multiples des w, je n'y conserve que les termes indépendants de τ et des w.

Pour λ_i, il faudrait tenir compte en outre de ceux qui proviennent du terme w''_i, de sorte qu'on aurait, pour les termes sécu-

laires purs de λ_i,

$$\lambda_i^0 + n'_i t + \varpi_i + g_i + \text{val. moy. } \delta\lambda_i.$$

184. Nous aurions pu également, pour comparer les développements (6) et (7), adopter les constantes

$$W_i, \quad E_k, \quad \varpi'_k;$$

il nous aurait suffi alors de remplacer les L_i^1, ξ_i^1, η_i^1, ϖ_i par leurs valeurs données directement en fonctions de ces constantes par les équations (4). Nous aurions obtenu ainsi quelques résultats intéressants.

Nous aurions pu aussi faire la comparaison des développements sans faire un choix particulier de constantes.

Il en serait résulté de grandes simplifications et nous aurions supprimé des longueurs plutôt que des difficultés. Mais notre comparaison aurait été moins précise.

185. **Théorème de Poisson.** — On sait que Lagrange a démontré un théorème dit *de l'invariabilité des grands axes* et en vertu duquel les développements des grands axes ne contiennent pas de termes séculaires, du moins si l'on néglige les carrés des masses, c'est-à-dire les termes de l'ordre de μ^2. Nous avons démontré plus haut ce théorème (*cf.* n° 105) si important au point de vue de la stabilité du système solaire.

Plus tard, Poisson a étendu les résultats de Lagrange et établi un théorème analogue pour le cas où, tenant compte des carrés des masses, c'est-à-dire des termes en μ^2, on néglige les cubes des masses, c'est-à-dire les termes en μ^3. On trouve, à la vérité, dans le développement des grands axes, des termes séculaires mixtes; mais il n'y a pas de termes séculaires purs.

Ainsi Poisson a montré que, dans le développement des grands axes ou, ce qui revient au même, dans celui des L_i, il n'y a pas de termes en

$$\mu^2 t.$$

Or les termes en μ^2 sont d'ordre *deux* et de rang *un*.

Nous allons maintenant démontrer ce théorème de Poisson ou plutôt nous allons établir un théorème plus général, à savoir que

dans le développement des L_i, *il n'y a pas de termes séculaires purs de rang* un.

D'où, en effet, pourraient provenir ces termes? Nous avons vu plus haut que, pour obtenir les termes séculaires purs de L_i, il faut prendre le développement de L_i suivant les puissances de τ et les sinus et les cosinus des multiples des w et ne conserver dans ce développement que les termes indépendants de τ et des w, ou, si l'on aime mieux, les termes cherchés ne sont pas autre chose que la *valeur moyenne* de L_i.

Or, plus haut, au n° 175, nous avons démontré que la valeur moyenne de $W_i - L_i$ est divisible par μ^2. Nous avons donc, pour les termes séculaires purs de L_i,

$$W_i + \mu^2 DL_i,$$

où DL_i est développable suivant les puissances de μ et des

$$E_k \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} w'_k.$$

Rappelons d'ailleurs que

$$\mu^2 DL_i = -\text{val. moy.}\left(\sum \delta L \frac{d\,\delta\lambda}{dw_i} + \sum \delta\xi \frac{d\,\delta\eta}{dw_i}\right).$$

Or W_i est une constante, ce n'est donc pas un terme séculaire proprement dit; quant à $\mu^2 DL_i$, il nous donnera des termes de la forme

$$(8) \qquad A\mu^\alpha \mathfrak{M}_1 \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} \nu' t,$$

où l'exposant α sera au moins égal à *deux*, puisque $\mu^2 DL_i$ est divisible par μ^2.

Or nous avons vu que les termes qui proviennent de (8) sont au moins de rang α. Ils sont donc au moins de rang *deux*. Donc les L_i n'ont pas de terme séculaire pur de rang plus petit que *deux*.

C. Q. F. D.

Nous n'aurons donc pas de terme en $\mu^2 t$, mais nous aurons des termes en

$$\mu^2 \sin \nu' t,$$

où ν sera nul et où, par conséquent, ν' sera divisible par μ.

Soit, en développant suivant les puissances de μ,

$$\nu' = \alpha_1 \mu + \alpha_2 \mu^2 + \ldots,$$

nous aurons

$$\mu^2 \sin \nu' t = \mu^2 \sin(\alpha_1 \beta t + \alpha_2 \mu^2 t + \ldots).$$

Si nous développons suivant les puissances de μ, le premier terme du développement sera

$$\alpha_1 \mu^3 t.$$

Nous aurons donc des termes en $\mu^3 t$.

Après la découverte de Poisson, on crut longtemps que le théorème était général et que, après l'avoir démontré d'abord pour la première approximation, puis pour la seconde, on ne tarderait pas à le démontrer également pour les approximations suivantes. De grands efforts furent faits dans ce sens et, naturellement, ils furent infructueux.

En 1876, M. Spiru-Haretu montra l'existence de termes en $\mu^3 t$ et ce résultat causa un grand étonnement, bien que, dès cette époque, quelques personnes en aient soupçonné la raison. Il n'a plus aujourd'hui rien qui puisse nous surprendre.

186. Revenons au Chapitre VIII. Au n° 141, nous avons trouvé la formule

$$\delta\lambda_i = -\mu \sum C_{ik} \int\int \frac{dF_1}{d\lambda_k} dt + \int \frac{d\Phi}{dL_i} dt + \mu \int_0^t \frac{dF_1}{dL_i} dt.$$

et nous avons dit :

1° Que la seconde intégrale du second membre ne peut donner de termes de rang *zéro;*

2° Que les termes de rang *zéro* provenant de la troisième intégrale étaient

$$\mu \int_0^t \frac{dR}{dL_i} dt;$$

3° Que la première intégrale ne pourrait donner d'autres termes de rang *zéro* que ceux provenant des termes de rang *un* séculaires purs de

$$\delta L_k = -\mu \int \frac{dF_1}{d\lambda_i} dt.$$

Or, d'après ce qui précède, ces termes n'existent pas. La première intégrale ne donnera donc pas de terme de rang *zéro*.

Donc les termes de rang *zéro* de λ_i ne pourront être que

$$n_i t + \lambda_i^0 + \mu \int_0^t \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}_i} dt,$$

c'est-à-dire que l'on obtiendra les termes de rang *zéro* de λ_i à l'aide de l'équation

$$(9) \qquad \frac{d\lambda_i}{dt} = n_i + \mu \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}_i},$$

jointe d'ailleurs aux équations

$$(10) \qquad \frac{d\xi_i}{dt} = -\mu \frac{d\mathrm{R}}{d\eta_i}, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = \mu \frac{d\mathrm{R}}{d\xi_i},$$

qui nous donnent les termes de rang *zéro* des ξ_i et des η_i.

Comme R ne dépend pas des λ_i, mais seulement des L_i (qui, si l'on se borne aux termes de rang *zéro*, comme aux Chapitres VIII et IX, doivent être regardés comme des constantes), ainsi que des ξ_i et des η_i qui ont été complètement déterminés à l'aide des équations (10).

Les seconds membres des équations (9) sont donc des fonctions entièrement connues, de sorte que ces équations (9) pourront s'intégrer complètement par une simple quadrature.

On obtiendra d'ailleurs ces termes de rang *zéro* de λ_i, qui ne peuvent être que séculaires purs, en partant de la formule

$$\text{termes séculaires purs de } \lambda_i = \lambda_i^0 + n'_i t + \varpi_i + g_i + \text{val. moy. } \delta\lambda_i.$$

et en faisant $\mu = 0$ dans g_i et $\delta\lambda_i$. Alors $\delta\lambda_i$, qui contient μ en facteur, s'annule et il reste

$$\lambda_i^0 + n'_i t + \varpi_i + g_i.$$

Soit, d'autre part,

$$n'_i = n_i + n_i^{(1)} \mu + n_i^{(2)} \mu^2 + \ldots.$$

Les termes

$$n_i^{(\alpha)} \mu^\alpha t$$

étant de rang $\alpha - 1$, nous ne conserverons que le premier d'entre eux :

$$n_i^{(1)} \mu t,$$

et il nous restera, pour les termes de rang *zéro* de λ_i,

$$\lambda_i^0 + n_i + \varpi_i + n_i^{(1)}\mu t + g_i.$$

Or g_i est développé suivant les puissances des

$$E_k \cos\varpi'_k, \quad E_k \sin\varpi'_k.$$

C'est donc une fonction périodique des ϖ', et si nous nous rappelons la façon dont nous l'avons formée, en n'ajoutant pas de constante arbitraire après l'intégration, nous voyons que la valeur moyenne de cette fonction périodique est nulle. Il en est de même de la valeur moyenne de $\frac{dg_i}{dt}$.

Donc, si nous remplaçons dans R les ξ_i et les η_i par leurs développements suivant les puissances des

$$E_k \cos\varpi'_k \quad \text{et} \quad E_k \sin\varpi'_k,$$

la valeur moyenne de

$$\frac{dR}{dL_i}$$

sera égale à

$$n_i^{(1)}.$$

Il s'agit ici des développements étudiés au Chapitre IX, puisque nous ne considérons ici que les termes de rang *zéro*. Donc ces développements ne contiennent que des termes de rang impair par rapport aux E_k (*cf.* nos 144 et suiv.), donc les ξ_i et les η_i s'annulent avec les E_k.

Le coefficient $n_i^{(1)}$ est développable suivant les puissances des E_k^2; pour avoir le premier terme de ce développement, il faut faire

$$E_k^2 = 0,$$

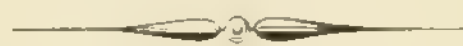
c'est-à-dire

$$\xi_i = \eta_i = 0.$$

Alors R se réduit à ce que nous avons appelé R_0 aux Chapitres VIII et IX; on aura donc, pour $E_k^2 = 0$,

$$n_i^{(1)} = \frac{dR_0}{dL_i}.$$

Ainsi, dans le développement de n'_i suivant les puissances de μ et des E_k^2, le coefficient de μ est $\frac{dR_0}{dL_i}$.



CHAPITRE XII.

SYMÉTRIE DES DÉVELOPPEMENTS. SOLUTIONS PÉRIODIQUES.

187. Symétrie. — Reprenons les développements du Chapitre X qui procèdent suivant les sinus et les cosinus des multiples des arguments w' et w''. Nous pouvons exprimer ces sinus ou ces cosinus à l'aide d'exponentielles imaginaires et écrire ces développements sous la forme suivante :

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} & L_k = \sum A e^{i\varphi}, \qquad \lambda_k = w_k + \sum B e^{i\varphi}, \\ & \xi_k + i\eta_k = \sum C e^{i\varphi}, \\ & \xi_k - i\eta_k = \sum C' e^{-i\varphi}, \end{aligned} \right.$$

où

$$\varphi = \sum k_j w'_j - \sum p_j w''_j,$$

et où les coefficients A, B, C, C′ dépendent des constantes W et E.

Pour satisfaire aux équations du mouvement, il faut poser

$$w'_j = n'_j t + \varpi_j, \qquad w''_j = \gamma'_j t + \varpi'_j;$$

d'où

$$\varphi = \nu t - h,$$

où

$$\nu = \sum k_j n'_j - \sum p_j \gamma'_j, \qquad h = \sum k_j \varpi_j - \sum p_j \varpi'_j.$$

Aux équations (1) nous adjoindrons les intégrales des aires que nous écrirons

$$U = \text{const.}, \qquad V = \text{const.},$$

en conservant aux lettres U et V la même signification que dans les Chapitres IX et X. Dans le cas où l'on est obligé d'avoir

recours à l'artifice du n° 178, c'est-à-dire de rapporter le système à des axes mobiles tournant autour de l'axe des x_3, les équations deviennent

$$(2) \qquad \frac{dL}{dt} = -\frac{d(F + \alpha\mu H)}{d\lambda}, \qquad \ldots$$

[équation (20) du n° 178].

Nous avons trouvé alors, au n° 179, que U et V au lieu d'être des constantes sont proportionnels au cosinus et au sinus de $\alpha\mu t + h$, de sorte que l'on peut écrire

$$U + iV = K e^{i(\alpha\mu t + h)}, \qquad U - iV = K e^{-i(\alpha\mu t + h)}.$$

K et h sont des constantes réelles et K dépend des constantes W et E.

En effet,

$$K^2 = U^2 + V^2,$$

s'exprimant aisément à l'aide des L_k, des ξ_k et des η_k, est une fonction des W, des E, des w' et des w''; comme d'ailleurs c'est une constante, elle ne pourra dépendre des w' et des w'', mais seulement des W et des E.

Observons maintenant que les équations du mouvement ne changent pas quand on fait tourner tout le système d'un angle ε autour de l'axe des x_3. Cette propriété est vraie des équations ordinaires du problème des trois corps; elle est vraie également des équations (2) [équation (20) du n° 178].

On doit donc pouvoir donner, aux constantes d'intégration

$$W, \quad E, \quad \varpi_j, \quad \varpi'_j,$$

des accroissements tels que tout le système tourne d'un angle ε autour de l'axe des x_3, c'est-à-dire que

$$(3) \qquad L_k, \quad \lambda_k, \quad \xi_k + i\eta_k, \quad \xi_k - i\eta_k$$

se changent en

$$(4) \qquad L_k, \quad \lambda_k + \varepsilon, \quad (\xi_k + i\eta_k)e^{-i\varepsilon}, \quad (\xi_k - i\eta_k)e^{i\varepsilon}.$$

Et en effet si nous faisons la transformation qui consiste à remplacer les quantités (3) par les quantités (4) (ε étant un angle constant quelconque), les équations du mouvement ne changeront pas; donc on devra retomber sur une nouvelle solution particulière

de ces équations, correspondant à de nouvelles valeurs des constantes d'intégration.

Si l'angle ε est infiniment petit, les accroissements des constantes d'intégration seront des infiniment petits

$$\partial W, \quad \partial E, \quad \partial \varpi_j, \quad \partial \varpi'_j.$$

Il en résultera pour

$$A, \quad B, \quad C, \quad C', \quad K, \quad n'_j, \quad \gamma'_j$$

des accroissements

$$\partial A, \quad \partial B, \quad \partial C, \quad \partial C', \quad \partial K, \quad \partial n'_j, \quad \partial \gamma'_j,$$

pour w''_j un accroissement $\partial w''_j$ et pour φ un accroissement

$$\partial \varphi = t\,\partial \nu + \partial h,$$

où

$$\partial \nu = \sum k_j\,\partial n'_j + \sum p_j\,\partial \gamma'_j, \qquad \partial h = \sum k_j\,\partial \varpi_j + \sum p_j\,\partial \varpi'_j.$$

D'un autre côté, D_k, λ_k, $\xi_k + i\eta_k$, $\xi_k - i\eta_k$ devront subir des déplacements

$$0, \quad \varepsilon,$$

$$(\xi_k + i\eta_k)\,i\varepsilon = -i\varepsilon \sum C e^{i\varphi},$$

$$-(\xi_k - i\eta_k)\,i\varepsilon = i\varepsilon \sum C' e^{-i\varphi};$$

de sorte que l'on aura

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} 0 &= \sum \partial A\,e^{i\varphi} + i\sum A\,\partial\nu\,t e^{i\varphi} + i\sum A\,\partial h\,e^{i\varphi},\\ \varepsilon = t\,\partial n'_k + \partial\varpi_k &+ \sum \partial B\,e^{i\varphi} + i\sum B\,\partial\nu\,t e^{i\varphi} + i\sum B\,\partial h\,e^{i\varphi},\\ -i\varepsilon\sum C\,e^{i\varphi} &= \sum \partial C\,e^{i\varphi} + i\sum C\,\partial\nu\,t e^{i\varphi} + i\sum C\,\partial h\,e^{i\varphi},\\ i\varepsilon\sum C' e^{-i\varphi} &= \sum \partial C' e^{-i\varphi} - i\sum C'\,\partial\nu\,t e^{-i\varphi} - i\sum C'\,\partial h\,e^{-i\varphi}.\end{aligned}\right.$$

Les deux membres des équations (5) sont développés suivant les puissances de t (qui ne figure d'ailleurs qu'à la puissance 0 et à la puissance 1) et suivant les sinus et les cosinus des multiples des $n'_j t$ et des $\gamma'_j t$. Ces deux membres sont donc de la forme des fonctions considérées dans le lemme du n° 107. Ce lemme s'applique

donc; c'est-à-dire que nos équations ne peuvent avoir lieu que si les termes semblables se détruisent.

Donc les termes en t, ou en $te^{i\varphi}$, qui ne figurent pas dans le premier membre, doivent s'annuler dans le second.

Donc : 1° on aura

$$\delta n'_k = 0;$$

2° Pour tous les termes dont le coefficient A, B, C ou C' n'est pas nul, on aura

$$\delta \nu = 0.$$

Or les termes les plus importants du développement de $\xi_k \pm i\eta_k$ sont ceux que nous avons trouvés au Chapitre VIII. Ce sont des termes en

$$E_j e^{iw'_j}.$$

Ils ne s'annulent pas en général et ils ne peuvent se réduire avec les termes suivants puisqu'ils sont beaucoup plus grands que tous les autres quand μ et les E sont très petits. Or si $\varphi = w'_j$, on a

$$\nu = -\gamma'_j;$$

on a donc

$$\delta\gamma'_j = 0.$$

Les n'_k et les γ'_j sont des fonctions des constantes W et E; alors une question se pose : des $3n$ équations

$$\delta n'_k = \delta\gamma'_j = 0 \tag{6}$$

peut-on déduire les $3n$ équations

$$\delta W = \delta E = 0? \tag{7}$$

La réponse est aisée; on a évidemment

$$\delta n'_k = \sum \frac{dn'_k}{dW}\delta W + \sum \frac{dn'_k}{dE}\delta E,$$
$$\delta\gamma'_j = \sum \frac{d\gamma'_j}{dW}\delta W + \sum \frac{d\gamma'_j}{dE}\delta E;$$

donc, si le déterminant fonctionnel des n'_k et des γ'_j par rapport aux W et aux E n'est pas nul, c'est-à-dire s'il n'y a pas de relation entre les fonctions n'_k et γ'_j, les équations (6) entraîneront les équations (7).

Si toutes les planètes se meuvent dans un même plan, de telle

façon qu'il n'y ait pas à se préoccuper des inclinaisons, on a seulement n arguments ϖ'' et n arguments ϖ', et, entre les $2n$ coefficients correspondants n' et γ', il n'y a aucune relation (nous reviendrons sur ce point au numéro suivant).

Si toutes les planètes ne se meuvent pas dans un même plan de telle façon que l'on ait à tenir compte des inclinaisons et que l'on ait à employer l'artifice du n° 178, il y aura une relation, puisque l'on aura, d'après le n° 179,

$$\gamma'_{2n} = z\mu,$$

c'est-à-dire que γ'_{2n} est une constante indépendante des E et des W.

Dans ce cas, il conviendra d'envisager la constante

$$K = \sqrt{U^2 + V^2},$$

c'est la projection du vecteur des aires sur le plan des $x_1 x_2$; elle ne change donc pas quand l'on fait tourner tout le système d'un angle ε (ce qui revient à un changement d'axes de coordonnées où l'axe des x_3 et le plan des $x_1 x_2$ sont conservés).

On aura donc

$$\delta K = 0.$$

Or entre les n'_k, les γ'_j (en exceptant γ'_{2n}) et K, il n'y a aucune relation (je reviendrai sur ce point au numéro suivant). On pourra donc toujours raisonner de la même manière et, des équations (6) auxquelles on adjoint $\delta K = 0$, on pourra déduire les équations (7)

$$\delta W = \delta E = 0.$$

Comme A, B, C, C' ne dépendent que des W et des E, on en conclut

$$\delta A = \delta B = \delta C = \delta C' = 0,$$

et nos équations (5) deviennent

$$(5\ bis)\quad \begin{cases} 0 = i\sum A\,\delta h\,e^{i\varphi}, \\ \varepsilon = i\sum B\,\delta h\,e^{i\varphi} + \delta\varpi, \\ -i\varepsilon\sum C\,e^{i\varphi} = +i\sum C\,\delta h\,e^{i\varphi}, \\ i\varepsilon\sum C'\,e^{-i\varphi} = -i\sum C'\,\delta h\,e^{-i\varphi}. \end{cases}$$

La première de ces équations nous apprend que, pour tous les termes de L_k, on a

$$\partial h = 0.$$

De même on a

$$\partial h = 0,$$

pour tous les termes périodiques de λ_k.

D'autre part, la deuxième équation nous montre en outre que

$$\partial \varpi_k = \varepsilon.$$

Enfin les deux dernières équations nous montrent que pour tous les termes de ξ_k ou de η_k, on a

$$\partial h = -\varepsilon.$$

Il en sera de même pour tous les termes de ξ'_k et η'_k, où les ξ'_k et les η'_k sont liés aux ξ_k et aux η_k par le changement linéaire de variables du n° 151.

Or parmi les termes de $\xi_k + i\eta_k$, il y a des termes en

$$e^{iw'_k},$$

qui ne s'annulent pas puisque leur coefficient est très voisin de E_k pour μ et E_k très petits.

Pour ces termes on aura

$$\partial \varphi = \partial w'_k$$

et par conséquent

$$\partial h = \partial \varpi'_k.$$

On a donc

$$\partial \varpi'_k = -\varepsilon.$$

Il vient donc en général

$$\partial h = \varepsilon\left(\sum k_j - \sum p_j\right).$$

D'où cette conséquence :

Pour tous les termes de L_k et de λ_k on a entre les entiers k_j et p_j la relation

$$\sum k_j - \sum p_j = 0.$$

Pour tous les termes de ξ_k et de η_k, on a

$$\sum k_j = \sum p_j = -1.$$

Ces résultats sont analogues à ceux que nous avons obtenus aux nos 116 et 162. Remarquons que nous aurions pu raisonner ici comme aux Chapitres VI et VII et inversement qu'au Chapitre VII nous aurions pu raisonner comme nous le faisons ici.

188. Au numéro précédent nous avons annoncé, sans le démontrer, qu'il n'y avait pas de relation entre les n' et les γ' si toutes les planètes se meuvent dans un même plan et que, dans le cas contraire, il n'y a pas de relations entre les n', les γ' et K. Nous en avons conclu les équations

$$\partial W = \partial E = 0.$$

Il serait aisé de vérifier cette assertion en se bornant aux premiers termes des développements, mais on peut arriver au résultat par une voie plus simple.

Reprenons en effet les variables ξ'_k et η'_k qui sont liées aux ξ_k et aux η_k par les relations linéaires du n° 151; on pourra les développer sous la même forme et écrire

$$\xi'^2_k + \eta'^2_k = D^k_0 + \sum D e^{i\varphi},$$

en mettant en évidence le terme tout connu D^k_0; de même dans le développement de L_k je puis mettre en évidence le terme tout connu et écrire

$$L_k = A^k_0 + \sum A e^{i\varphi}.$$

Quand je ferai tourner tout le système d'un angle ε, on voit que $\xi'^2_k + \eta'^2_k$ ne change pas, et il en est de même de L_k; on a donc

$$\partial D^k_0 + \sum \partial D e^{i\varphi} + i \sum D \, \partial\varphi \, e^{i\varphi} = 0,$$

$$\partial A^k_0 + \sum \partial A e^{i\varphi} + i \sum A \, \partial\varphi \, e^{i\varphi} = 0.$$

Les termes tout connus doivent s'annuler, d'où

(8) $$\partial D^k_0 = 0, \qquad \partial A^k_0 = 0.$$

Les D_0^k et les A_0^k sont des fonctions des W et des E. Les équations (8) entraînent-elles les équations (7)? Il suffit pour cela, comme nous l'avons dit, qu'il n'y ait aucune relation entre les D_0^k et les A_0^k. Or cela est aisé à vérifier.

Il suffit de faire la vérification pour $\mu = 0$. Or, pour $\mu = 0$, on a

$$L_k = W_k$$

et par conséquent

$$A_0^k = W_k.$$

Pour $\mu = 0$, les ξ_k, les η_k, les ξ'_k et les η'_k se réduisent à leurs termes de rang *zéro*, c'est-à-dire à leurs valeurs telles qu'elles ont été calculées dans le Chapitre IX.

Il nous suffira de faire la vérification pour les petites valeurs des excentricités et des inclinaisons, c'est-à-dire pour les petites valeurs des E_k. Il est clair en effet que, s'il y avait des relations entre les A_k^0 et les D_k^0, ces relations subsisteraient quand on réduirait les développements à leurs termes de degré le moins élevé.

Or, pour les petites valeurs des E_k, nous pouvons réduire les ξ_k et les η_k aux premiers termes de leurs développements suivant les puissances des E_k, c'est-à-dire à leurs valeurs telles qu'elles ont été calculées dans le Chapitre VIII. On a alors

$$\xi_k'^2 + \eta_k'^2 = E_k^2$$

et par conséquent

$$D_0^k = E_k^2.$$

Il n'y a donc aucune relation entre les $A_0^k = W_k$ et les $D_0^k = E_k^2$.

C. Q. F. D.

Donc les équations (8) entraînent les équations (7) et par conséquent

$$\delta A = \delta B = \delta C = \delta C' = 0.$$

On peut poursuivre l'analyse comme au numéro précédent.

189. On peut en déduire des conséquences sur la façon dont les n'_k et les γ'_j dépendent du coefficient α qui figure dans les équations (20) du n° 178 [équation (2)]; appelons (2 *bis*) ce que deviennent les équations (2) quand on y remplace α par $\alpha + \delta\alpha$ en

donnant à α un accroissement $\delta\alpha$. Alors à une solution

$$L_k,\quad \lambda_k,\quad \xi_k + i\eta_k,\quad \xi_k - i\eta_k,\quad \xi_k'^2 + \eta_k'^2$$

des équations (2) correspondra une solution

$$L_k,\quad \lambda_k + \delta\alpha\,\mu t,\quad (\xi_k + i\eta_k)e^{-i\,\delta\alpha\,\mu t},\quad (\xi_k - i\eta_k)e^{i\,\delta\alpha\,\mu t},\quad \xi_k'^2 + \eta_k'^2$$

des équations (2 *bis*).

D'autre part on pourrait concevoir que, pour passer d'une solution particulière des équations (2) à la solution correspondante des équations (2 *bis*), il fût nécessaire de donner aux constantes d'intégration de petits accroissements.

Les coefficients A, ..., ν, ... subiront également des accroissements, d'une part parce qu'ils dépendent de ces constantes et d'autre part parce qu'ils dépendent de α. Nous sommes donc conduits aux formules suivantes, analogues aux équations (5), où toutefois nous avons mis en évidence comme au numéro précédent les termes tout connus δA_k^0 et δD_k^0 :

$$(9)\quad \begin{cases} 0 = \delta A_k^0 + \sum \delta A\, e^{i\varphi} - i\sum A\, \delta\nu\, t e^{i\varphi} + i\sum A\, \delta h\, e^{i\varphi}, \\ t\mu\,\delta\alpha = t\,\delta n_k' + \delta\varpi_k + \sum \delta B\, e^{i\varphi} - i\sum B\, \delta\nu\, t e^{i\varphi} - i\sum B\, \delta h\, e^{i\varphi}, \\ -it\mu\,\delta\alpha \sum C\, e^{i\varphi} = \sum \delta C\, e^{i\varphi} + i\sum C\, \delta\nu\, t e^{i\varphi} - i\sum C\, \delta h\, e^{i\varphi}, \\ it\mu\,\delta\alpha \sum C' e^{-i\varphi} = \sum \delta C' e^{-i\varphi} - i\sum C'\, \delta\nu\, t e^{-i\varphi} - i\sum C'\, \delta h\, e^{-i\varphi}, \\ 0 = \delta D_k^0 + \sum \delta D\, e^{i\varphi} + i\sum D\, \delta\nu\, t e^{i\varphi} - i\sum D\, \delta h\, e^{i\varphi}. \end{cases}$$

Égalons encore ici les termes semblables; nous trouverons d'abord

$$\delta A_k^0 = 0, \qquad \delta D_k^0 = 0,$$

d'où

$$\delta W = \delta E = 0.$$

Nous voyons ensuite que $\delta\nu$ et δh sont nuls dans les développements de

$$L_k,\quad \lambda_k,\quad \xi_k'^2 + \eta_k'^2$$

et que

$$\delta\varpi_k = 0.$$

Mais le point le plus important au point de vue qui nous occupe,

c'est que l'on a, en égalant les termes en t dans la seconde équation

$$\mu\,\delta\alpha = \delta n'_k.$$

et en égalant les termes en $te^{i\varphi}$ dans la troisième et la quatrième,

$$-\mu\,\delta\alpha = \delta\nu,$$

et cela pour tous les termes de ξ_k et de η_k dont le coefficient n'est pas nul. Or, parmi ces termes, il y a comme nous l'avons vu des termes en

$$E_k e^{iw'_k},$$

où

$$\nu = -\gamma'_k.$$

On a donc

$$\delta\gamma'_k = \mu\,\delta\alpha.$$

Ainsi tous les $\delta n'_k$ et les $\delta\gamma'_k$ sont égaux entre eux; les différences $n'_k - n'_j$, $\gamma'_k - \gamma'_j$, $n'_k - \gamma'_j$, sont donc indépendantes de α. Comme nous avons vu d'autre part que γ'_{2n} est égal à $\alpha\mu$, nous pouvons conclure que $n'_k - \alpha\mu$ et $\gamma'_k - \alpha\mu$ sont indépendants de α.

Dans les développements de L_k et de λ_k, on a

$$\sum k - \sum p = 0,$$

d'où

$$\nu = \sum k_j n'_j - \sum p_j \gamma'_j = \sum k_j (n'_j - \alpha\mu) - \sum p_j (\gamma'_j - \alpha\mu),$$

ce qui montre que ν est indépendante de α.

Si donc on regarde les constantes ϖ et ϖ' comme indépendantes de α, l'angle φ sera indépendant de α, et il en sera de même de $w''_k - \alpha\mu t$. Il en sera donc de même de L_k et de $\lambda_k - \alpha\mu t$.

Quand donc α se changera en $\alpha + \delta\alpha$, les quantités L_k et λ_k se changeront en L_k et $\lambda_k + \delta\alpha\,\mu t$.

Dans les développements de ξ_k et η_k, on a

$$\sum k - \sum p = -1$$

et par conséquent

$$\nu = \sum k_j n'_j - \sum p_j \gamma'_j = \sum k_j (n'_j - \alpha\mu) - \sum p_j (\gamma'_j - \alpha\mu) - \alpha\mu.$$

ce qui prouve que $\nu - \alpha\mu$ est indépendant de α, et par conséquent que $\varphi + \alpha\mu t$ est indépendante de α.

Donc

$$(\xi_k - i\eta_k)e^{i\alpha\mu t} = \sum C e^{i(\varphi + \alpha\mu t)}$$

est indépendant de α, et il en est de même de

$$(\xi_k + i\eta_k)e^{-i\alpha\mu t}.$$

Cela veut dire que quand on changera α en $\alpha + \delta\alpha$, les expressions $\xi_k + i\eta_k$ et $\xi_k - i\eta_k$ se changeront en

$$(\xi_k + i\eta_k)e^{-i\delta\alpha\mu t}, \quad (\xi_k - i\eta_k)e^{i\delta\alpha\mu t}.$$

Donc pour passer d'une solution des équations (2) à la solution correspondante des équations (2 *bis*), il suffit de changer α en $\alpha + \delta\alpha$, sans rien changer aux constantes d'intégration W, E, ϖ, ϖ'.

On pourrait d'ailleurs se borner à constater qu'en changeant dans nos développements

$$w'' \quad \text{en} \quad w'' - \delta\alpha\mu t,$$
$$w' \quad \text{en} \quad w' - \delta\alpha\mu t,$$

en conservant les mêmes constantes W et E, on change L_k, λ_k, $\xi_k + i\eta_k$, $\xi_k - i\eta_k$ en L_k, $\lambda_k + \delta\alpha\mu t$

$$(\xi_k + i\eta_k)e^{-i\delta\alpha\mu t},$$
$$(\xi_k - i\eta_k)e^{i\delta\alpha\mu t},$$

c'est-à-dire que l'on passe d'une solution des équations (2) à une solution des équations (2 *bis*). Cela résulte immédiatement des relations

$$\sum k - \sum p = 0,$$

ou

$$\sum k - \sum p = -1,$$

sans que l'on ait besoin de recourir à l'analyse qui précède.

Tout cela nous montre que le passage de la solution générale des équations (2), c'est-à-dire des équations (20) du n° 178, à celle de l'équation du mouvement des trois corps rapportés à des axes fixes, se fait d'une façon immédiate ; les coefficients des déve-

loppements (A, B, C, C′) ne dépendent pas de α; seuls les moyens mouvements dépendent de α et ils en dépendent linéairement. Il suffit donc de donner à chacun de ces moyens mouvements la valeur qui correspond à $\alpha = 0$.

Dans ces conditions l'un d'eux s'annule, c'est γ'_{2n}. Si d'ailleurs nous choisissons le plan invariable pour plan des $x_1 x_2$, la quantité que nous avons appelée E_{2n} s'annule; de sorte que les termes qui dépendent de l'argument w'_{2n} disparaissent d'eux-mêmes.

190. Conjonctions symétriques. — Supposons qu'à l'époque $t = 0$ tous les astres se trouvent dans un même plan que j'appellerai P et que toutes leurs vitesses soient dirigées perpendiculairement à ce plan.

Nous dirons alors que les astres sont en *conjonction symétrique*. Dans ce cas, il arrivera que si l'on compare les positions d'un même astre à l'instant t et à l'instant $-t$ ces deux positions sont symétriques l'une de l'autre par rapport au plan P. C'est là une conséquence immédiate de la symétrie de nos équations.

Nous pouvons supposer que l'on ait défini les constantes ϖ et ϖ' de telle façon que les arguments w' et w'' s'annulent au moment de la conjonction symétrique, c'est-à-dire pour $t = 0$. Quand nous changerons t en $-t$, c'est-à-dire quand nous changerons les w' et les w'' en $-w'$ et $-w''$, la position de chaque astre sera remplacée par sa symétrique par rapport au plan P. Si nous choisissons le plan P pour plan des $x_1 x_3$, cela veut dire que L_k, λ_k, ξ_k, η_k se changeront en L_k, $-\lambda_k$, ξ_k et $-\eta_k$. Donc *dans nos développements procédant suivant les sinus et les cosinus des multiples des w' et des w'', les L_k et les ξ_k ne contiendront que des cosinus, tandis que les λ_k et les η_k ne contiendront que des sinus.*

On pourrait croire qu'en nous imposant la condition de la conjonction symétrique, nous avons restreint la généralité, mais en réalité, nous ne l'avons pas fait d'une façon essentielle. Si en effet il y a $n+1$ corps dont le centre de gravité commun est supposé fixe, c'est-à-dire n planètes, il nous reste, au moment de la conjonction symétrique, des arbitraires au nombre de $3n$, à savoir les $2n$ coordonnées des n planètes dans le plan P, pris pour plan

des $x_1 x_3$, et leurs n vitesses dont la direction nous est imposée, mais dont la grandeur reste arbitraire. Nous pouvons alors profiter de cette indétermination pour choisir arbitrairement les $3n$ constantes W et E.

Or nos inconnues ne dépendent que de ces $3n$ constantes et des $3n$ arguments w' et w''; nos développements qui contiennent les uns seulement des sinus, les autres seulement des cosinus nous suffisent donc pour nous donner la solution la plus générale. En donnant aux constantes ϖ et ϖ' la valeur zéro, on aura la solution particulière qui correspond au cas de la conjonction symétrique; en leur donnant des valeurs quelconques on aura la solution générale.

191. D'autre part, si nous remplaçons le système par un autre symétrique du premier par rapport au plan des $x_1 x_2$, les L et les λ ne changeront pas, non plus que les variables excentriques tandis que les variables obliques changeront de signe.

D'ailleurs, en vertu de la symétrie des équations, si les positions initiales des deux systèmes ainsi comparés sont symétriques l'une de l'autre par rapport au plan des $x_1 x_2$, il en sera de même de leurs positions à un instant quelconque.

Soient donc

$$W_k, \quad E_k, \quad \varpi_k, \quad \varpi'_k,$$

les valeurs des constantes d'intégration qui conviennent au premier de ces deux systèmes; on doit pouvoir trouver d'autres valeurs de ces constantes qui conviennent au second système, c'est-à-dire telles qu'en les substituant aux valeurs primitives de ces constantes on change le signe de toutes les variables obliques sans altérer les autres variables.

Soit alors, pour le premier système,

$$A e^{i\varphi}$$

un terme quelconque de l'un de nos développements, la lettre φ ayant la même signification qu'au n° 187.

Soit $A' e^{i(\varphi+h)}$ le terme correspondant pour le second système. Les deux développements devront être identiques au signe près. Si donc on a affaire à L_k, λ_k ou à une variable excentrique, on

aura (en égalant terme à terme les développements correspondants)

$$A e^{i\varphi} = A' e^{i(\varphi+h)}.$$

Si l'on a affaire à une variable oblique, on aura au contraire

$$A e^{i\varphi} = - A' e^{i(\varphi+h)},$$

ce que l'on peut réaliser de deux manières :

1° En faisant

$$A = - A', \qquad h = 0;$$

2° En faisant

$$A = A', \qquad h = \pi.$$

Pour fixer les idées à ce sujet, nous supposerons qu'il y ait conjonction symétrique à l'instant $t = 0$, c'est-à-dire que les constantes ϖ et ϖ' soient nulles. Ainsi que nous venons de le voir, cela ne restreint pas la généralité d'une manière essentielle. On aura alors

$$h = 0,$$

avec $A = A'$ pour les L, les λ et les variables excentriques et $A = - A'$ pour les variables obliques.

Rappelons d'abord que, dans les conventions faites dans les Chapitres précédents, les indices impairs ont été affectés aux variables excentriques ξ et η ainsi qu'aux E et aux w' correspondants, tandis que les indices pairs ont été affectés aux variables obliques ξ et η ainsi qu'aux E et aux w' correspondants.

Que deviennent donc les constantes W et E quand l'on passe du premier système au second symétrique du premier par rapport au plan des $x_1 x_2$?

Je dis que les W ne changent pas, non plus que les E d'indice impair, tandis que les E d'indice pair changent de signe.

D'abord pour les W. Nous avons vu que W_i n'est autre chose que la valeur moyenne de

$$\sum L \frac{d\lambda}{dw_i} + \sum \xi \frac{d\eta}{dw_i}. \tag{10}$$

prise par rapport à τ et aux w (valeur moyenne qui s'obtient, je le rappelle, en exprimant tout en fonctions de τ et des w et conservant seulement les termes indépendants de τ et des w). Quand l'on veut

ensuite tout exprimer en fonctions des nouveaux arguments w' et w'', il faut, comme nous l'avons expliqué au Chapitre X, faire

$$\tau = 0, \qquad w_i = w_i'' - g_i$$

puis remplacer L_i^0, g_i, ξ_i^0, η_i^0 par leurs valeurs en fonctions des w'. On voit que les termes dépendant de τ disparaîtront quand on fera $\tau = 0$; que les termes indépendants de τ, mais dépendant des w, nous donneront des termes dépendant des w'', tandis que les termes indépendants de τ et des w nous donneront des termes indépendants des w''.

La valeur moyenne par rapport à τ et aux w, ne différera donc pas de la valeur moyenne par rapport aux w''. D'autre part

$$\frac{d\lambda}{dw_i} = \frac{d\lambda}{dw_i''}, \qquad \frac{d\eta}{dw_i} = \frac{d\eta}{dw_i''},$$

de sorte que finalement W_i n'est autre chose que la valeur moyenne par rapport aux w'' de

$$(10\ bis) \qquad \sum L \frac{d\lambda}{dw_i} + \sum \xi \frac{d\eta}{dw_i}.$$

Remarquons en passant que W_i étant une constante, cette expression (10 *bis*) ne peut contenir de terme indépendant des w'' et dépendant des w'. Or si nous nous reportons à la *comparaison des développements* du Chapitre XI, nous voyons tout de suite que les termes séculaires purs proviennent du développement des termes qui dépendent des w' sans dépendre des w''. L'expression (10 *bis*), ou si l'on aime mieux l'expression (10), ne peut contenir de termes séculaires purs.

C'est là une *généralisation du théorème de Poisson*.

Quoi qu'il en soit, quand l'on passe du premier système au second L et λ ne changent pas, ξ et η ne changent pas non plus quand l'indice est impair (variables excentriques) : ξ et η changent de signe tous deux quand l'indice est pair. En résumé, l'expression (10 *bis*) ne change pas. Donc W_i ne change pas.

C. Q. F. D.

Passons aux E_k. Soit A_k le coefficient de $\cos w_k'$ dans l'un de nos développements; comme tous nos développements doivent procéder suivant les puissances des $E_j \cos w_j'$, $E_j \sin w_j'$, nous devons

conclure que le rapport

$$\frac{A_k}{E_k}$$

est développable suivant les puissances des E_j^2; nous avons donc des équations de la forme

$$A_k = E_k \varphi_k(E_1^2, E_2^2, \ldots, E_{2n}^2) \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2n),$$

où les φ_k sont des séries ordonnées suivant les puissances des E_j^2.

De ces équations, on pourra, par le théorème sur le *retour des suites,* déjà appliqué aux n[os] 66 et 181, tirer les E_j en séries ordonnées suivant les puissances des A_k. Il résulte des formules précédentes que quand on change le signe de E_k, celui de A_k change. Il en résulte que le développement de E_k suivant les puissances de A doit être divisible par A_k et que le quotient

$$\frac{E_k}{A_k},$$

ne devant pas changer quand on change le signe de l'un quelconque des A_j, procédera suivant les puissances des A_j^2 et que l'on aura

$$E_k = A_k \psi_k(A_1^2, A_2^2, \ldots, A_{2n}^2) \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2n),$$

les ψ procédant suivant les puissances des A_j^2.

Or nous venons de voir que, quand on passe du premier système au second (qui est symétrique du premier par rapport au plan des $x_1 x_2$), le coefficient A_k ne change pas si l'indice k est impair, et change de signe si cet indice est pair, Il en est donc de même de la constante E_k. C. Q. F. D.

Nous avons vu d'autre part que tous les coefficients A du développement des L, des λ et des variables excentriques ne changent pas quand on passe du premier système au second. Tous ces coefficients sont donc de degré pair par rapport aux constantes E_k d'indice pair; dans chacun de leurs termes, *la somme des exposants des constantes* E_k *d'indice pair est donc paire.*

Mais ces développements procédant suivant les puissances des $E_k \cos w'_k$ et des $E_k \sin w'_k$, l'exposant de E_k est de même parité que le coefficient du w'_j correspondant (*cf.* n° 69).

Donc *la somme des coefficients des arguments* ϖ'_k *d'indice pair est paire.*

Dans les développements des *variables obliques,* au contraire, chaque coefficient change de signe quand on passe du premier système au second. Donc, inversement, *la somme des exposants des constantes* E_k *d'indice pair est impaire, ainsi que la somme des coefficients des arguments* ϖ'_k *d'indice pair.*

192. **Coordonnées héliocentriques.** — Les coordonnées héliocentriques rectangulaires des planètes, leurs rayons vecteurs, les cosinus et les sinus de leurs longitudes et de leurs latitudes, leurs distances mutuelles sont des fonctions uniformes des éléments canoniques L, λ, ξ, η. Comme L_k, $\lambda_k - \varpi''_k$, ξ_k, η_k sont des fonctions périodiques des arguments ϖ', ϖ'', il en sera de même des coordonnées héliocentriques, des distances mutuelles, etc., de sorte que ces quantités seront développables suivant les sinus et les cosinus des multiples des ϖ' et des ϖ''. De plus elles sont développables suivant les puissances des $E_k \cos\varpi'_k$, $E_k \sin\varpi'_k$, puisque les éléments canoniques le sont. Ainsi les développements des coordonnées héliocentriques, des distances mutuelles, etc. seront de la forme

$$\sum A \prod (E_j^{q_j}) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \left(\sum k_j \varpi''_j - \sum p_j \varpi'_j\right).$$

Les coefficients constants A dépendant seulement des W et de μ, et $\prod (E_j^{q_j})$ désignant le produit de $2n$ facteurs de la forme $E_j^{q_j}$. En raisonnant comme au n° 69, on verrait d'ailleurs que

$$q_j \equiv p_j \pmod 2 \qquad q_j \geqq |p_j|.$$

Quand nous ferons tourner tout le système d'un angle ε autour de l'axe des x_3, c'est-à-dire d'après le n° 187, quand nous changerons ϖ''_j et ϖ'_j en $\varpi''_j + \varepsilon$ et $\varpi'_j - \varepsilon$, les distances mutuelles des $n+1$ corps ne changent pas; il en sera de même des coordonnées héliocentriques

$$x'_3, \quad x'_6, \quad \ldots,$$

ou

$$x_3, \quad x_6, \quad \ldots$$

relatives à l'axe des x_3.

Les coordonnées relatives aux axes des x_1 et des x_2 subiront au contraire un changement; il est clair en effet que

$$x'_1 + ix'_2, \quad x'_4 + ix'_5, \quad \ldots,$$
$$x_1 + ix_2, \quad x_4 + ix_5, \quad \ldots$$

se changeront en

$$(x'_1 + ix'_2)e^{i\varepsilon}, \quad (x'_4 + ix'_5)e^{i\varepsilon}, \quad \ldots,$$
$$(x_1 + ix_2)e^{i\varepsilon}, \quad (x_4 + ix_5)e^{i\varepsilon}, \quad \ldots,$$

tandis que

$$x'_1 - ix'_2, \quad x'_4 - ix'_5, \quad \ldots,$$
$$x_1 - ix_2, \quad x_4 - ix_5, \quad \ldots$$

se changeront en

$$(x'_1 - ix'_2)e^{-i\varepsilon}, \quad (x'_4 - ix'_5)e^{-i\varepsilon}, \quad \ldots,$$
$$(x_1 - ix_2)e^{-i\varepsilon}, \quad (x_4 - ix_5)e^{-i\varepsilon}, \quad \ldots.$$

Il en résulte que

$$\sum k - \sum p = 0,$$

dans le développement des distances mutuelles et des coordonnées

$$x'_3, \quad x'_6, \quad \ldots, \quad x_3, \quad x_6, \quad \ldots$$

et que

$$\sum k - \sum p = 1,$$

dans le développement des coordonnées

$$x'_1, \quad x'_2, \quad x'_4, \quad x'_5, \quad \ldots; \quad x_1, \quad x_2, \quad x_4, \quad x_5, \quad \ldots.$$

A cause de la symétrie par rapport au plan des x_1x_2 (*cf.* n° 190), les développements de

$$x'_1, \quad x'_3, \quad x'_4, \quad x'_6, \quad \ldots; \quad x_1, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_6, \quad \ldots$$

ne contiennent que des cosinus. et il en est de même de ceux des rayons vecteurs et des distances mutuelles.

Au contraire, les développements de

$$x'_2, \quad x'_5, \quad \ldots; \quad x_2, \quad x_5, \quad \ldots$$

ne contiennent que des sinus.

A cause de la symétrie par rapport au plan des x_1x_3 (*cf.* n° 191),

les développements de

$$x'_1, \quad x'_2, \quad x'_4, \quad x'_5, \quad \ldots; \quad x_1, \quad x_2, \quad x_4, \quad x_5, \quad \ldots$$

jouissent de cette propriété que les deux sommes

$$\sum q_j, \quad \sum p_j$$

sont paires *quand la sommation est étendue à toutes les valeurs paires de l'indice j*.

Il en est de même pour les distances mutuelles et les rayons vecteurs.

Au contraire, dans les développements de

$$x'_3, \quad x'_6, \quad \ldots; \quad x_3, \quad x_6, \quad \ldots,$$

ces deux sommes sont impaires.

193. Nombre des arguments. — Supposons qu'il y ait $n+1$ corps, soit n planètes; le nombre des arguments est de $3n$, à savoir $2n$ arguments w' et n arguments w''. Si l'on rapportait le système à des axes mobiles de façon à retomber sur les équations (20) du n° 178, tous ces arguments seraient distincts; car il n'y aurait entre les moyens mouvements n'_i et $-\gamma'_i$ aucune relation linéaire à coefficients entiers.

Mais il n'en est plus de même si nous prenons des axes fixes (c'est-à-dire si nous faisons $\alpha = 0$ dans les équations (20) du n° 178). Dans ce cas, en effet, l'un des moyens mouvements γ'_{2n} est nul, de sorte que l'un de nos arguments w'_{2n} se réduit à une constante. Nous n'avons plus alors que $3n-1$ arguments distincts.

Observons que, si nous prenons le plan invariable pour plan des $x_1 x_2$, on a

$$E_{2n} = 0.$$

Pour nous en rendre compte supposons de nouveau α différent de zéro et reprenons les équations démontrées plus haut (*cf.* 179) :

$$U = K \sin(\alpha\mu t + h), \qquad V = K \cos(\alpha\mu t + h);$$

nous avons vu que $\alpha\mu t + h$ n'est autre chose que w'_n; il en résulte que K contient en facteur E_{2n}; si donc je fais $E_{2n} = 0$, les deux quantités U et V seront constamment nulles, c'est-à-dire que le

vecteur des aires sera constamment normal au plan des x_1x_2; ainsi la condition $E_{2n}=0$ équivaut à celle que le plan des x_1x_2 et le plan invariable coïncident.

Pour passer du cas où α n'est pas nul, à celui où α est nul, il suffit de conserver les mêmes développements mais en attribuant aux moyens mouvements d'autres valeurs (*cf.* n° 189 *in fine*). La condition pour que les deux plans coïncident restera donc la même, c'est-à-dire $E_{2n}=0$.

Si l'on fait $E_{2n}=0$, tous les termes qui dépendent de l'argument ϖ'_{2n} disparaissent; dans ceux qui resteront, nous aurons donc

$$\sum k_j - \sum p_j = 1,$$

pour certaines de nos coordonnées, et

$$\sum k_j - \sum p_j = 0$$

pour d'autres coordonnées et pour les distances mutuelles *et cela en donnant à l'indice j de p_j toutes les valeurs, sauf $j=2n$.*

Les distances mutuelles auront donc un terme général de la forme

$$A\cos\left(\sum k_j\varpi''_j + \sum p_j\varpi'_j\right),$$

où

$$p_{2n}=0, \qquad \sum k_j - \sum p_j = 0,$$

ou ce qui revient au même

$$A\cos\left[\sum k_j(\varpi''_j - \varpi'_{2n-1}) + \sum p_j(\varpi'_j - \varpi'_{2n-1})\right],$$

où l'indice de k_j peut prendre les valeurs

$$1, \quad 2, \quad \ldots, \quad n$$

et celui de p_j les valeurs

$$1, \quad 2, \quad \ldots, \quad 2n-2.$$

Donc les distances mutuelles ne dépendent que des $3n-2$ arguments

$$\varpi''_j - \varpi'_{2n-1}, \quad \varpi'_j - \varpi'_{2n-1}.$$

Cela a été démontré en choisissant le plan invariable pour plan des $x_1 x_2$; mais, les distances mutuelles étant indépendantes du choix des axes, cela reste vrai quel que soit le plan des $x_1 x_2$ choisi.

En particulier les distances mutuelles dans le cas du problème des trois corps dépendent de quatre arguments.

Si le mouvement est plan, nous n'avons que n arguments ϖ'' et n arguments ϖ'; tous ces arguments sont distincts, de sorte que les coordonnées dépendent de $2n$ arguments. Les développements des distances mutuelles satisfont à la condition

$$\sum k - \sum p = 0.$$

Les distances mutuelles ne dépendent donc que de $2n - 1$ arguments (3 dans le cas des trois corps).

Supposons maintenant que l'une des masses soit infiniment petite. Dans ce cas nous aurons n corps ($n - 1$ planètes) dont les coordonnées dépendront seulement de $3n - 4$ arguments

$$\begin{array}{lllll} \varpi''_2, & \varpi''_3, & \ldots, & \varpi''_{n-1}, & \varpi''_n, \\ \varpi'_3, & \varpi'_5, & \ldots, & \varpi'_{2n-3}, & \varpi'_{2n-1}, \\ \varpi'_4, & \varpi'_6, & \ldots, & \varpi'_{2n-2}. & \end{array}$$

Tout se passera en effet pour eux comme si la masse infiniment petite n'existait pas, puisque son action est trop petite pour troubler leurs mouvements. Quant à la masse infiniment petite, ses coordonnées dépendront *en outre* des trois arguments nouveaux

$$\varpi''_1, \quad \varpi'_1, \quad \varpi'_2.$$

Quant aux distances mutuelles des n gros corps, elles dépendront de $3n - 5$ arguments seulement; celles du petit corps aux gros corps dépendront de $3n - 2$ arguments, c'est-à-dire toujours de trois arguments nouveaux.

Supposons maintenant que nous ayons trois corps seulement dont l'un infiniment petit. Cela revient à supposer dans le cas précédent $n = 2$; on n'a plus alors que deux gros corps; mais les coordonnées des deux corps, dont le mouvement est alors képlérien, ne dépendent plus de $3n - 4 = 3 \cdot 2 - 4 = 2$ arguments, mais

d'un argument seulement; cela tient à ce que le périhélie étant fixe, l'argument $w'_{2n-1} = w'_3$ se réduit à une constante.

Les coordonnées du petit corps dépendent alors de

$$\begin{array}{ll} w''_1, & w''_2, \\ w'_1, & w'_3, \\ w'_2, & \end{array}$$

ou (puisque w'_3 est une constante) de quatre arguments distincts seulement.

La distance mutuelle des deux gros corps dépend alors d'un seul argument distinct w''_2 et la distance du petit corps aux deux gros dépend, comme ses coordonnées, de quatre arguments distincts.

Je voudrais faire voir que w'_3 représente bien la longitude du périhélie de l'orbite de la grosse planète et que w'_4 représente la longitude du nœud; et surtout que E_3 s'annule avec l'excentricité de cette orbite, et E_4 avec son inclinaison.

Si nous égalons E_4 à *zéro*, le plan des $x_1 x_2$ se confond avec le plan invariable qui n'est autre chose dans le cas actuel que le plan de l'orbite de la grosse planète.

Dans ces conditions, tous les termes dépendant de w'_4 disparaissent de tous les développements. Supposons maintenant de nouveau que α ne soit pas nul, c'est-à-dire que notre système soit rapporté à des axes tournants. Dans ce cas les coordonnées de la grosse planète dépendent de deux arguments distincts w''_2 et w'_3 dont les moyens mouvements sont respectivement

$$\frac{dw''_2}{dt} = n_2 - \alpha\mu, \qquad \frac{dw'_3}{dt} = -\alpha\mu,$$

celles de la petite planète dépendent des cinq arguments w''_1, w'_1, w'_2, w''_2, w'_3.

Quand l'excentricité est nulle, les coordonnées de la grosse planète sont proportionnelles à $\cos w''_2$, $\sin w''_2$, elles ne dépendent donc plus de w'_3, ce qui veut dire que $E_3 = 0$. Si $E_3 = 0$, tous les termes dépendant de w'_3 doivent disparaître de tous les développements.

Donc, *si l'excentricité de l'orbite de la grosse planète est nulle,* les coordonnées de la petite planète et ses distances aux

deux autres corps pourront se développer suivant les sinus et les cosinus de

$$k_1 w''_1 + k_2 w''_2 + p_1 w'_1 + p_2 w'_2$$

(p_3 et p_4 étant nuls) et l'on aura

$$k_1 + k_2 - p_1 - p_2 = 0$$

pour les distances mutuelles, et pour x_3

$$k_1 + k_2 - p_1 - p_2 = 1,$$

pour x_1 et pour x_2.

Si nous supposons de plus $E_2 = 0$, tous les termes dépendant de w'_2 disparaîtront. Comme dans la troisième coordonnée x_3, tous les termes sont d'ordre impair par rapport aux E d'indice impair (*cf.* n° 191), c'est-à-dire par rapport à E_2, tous ces termes s'annuleront et x_3 sera constamment nul. La petite planète restera constamment dans le plan de l'orbite de la grosse planète. Nous retombons sur le *problème restreint*.

Dans ce cas, les distances de la petite planète aux deux autres corps procèdent suivant les cosinus de

$$k_1 w''_1 + k_2 w''_2 + p_1 w'_1,$$

où

$$p_1 = k_1 + k_2.$$

Elles dépendent donc de deux arguments seulement

$$w''_1 + w'_1, \qquad w''_2 + w'_1.$$

Rappelons que les moyens mouvements $\frac{dw''_i}{dt}$ sont finis, tandis que les moyens mouvements $\frac{dw'_i}{dt}$ sont très petits de l'ordre de μ. Dans le problème restreint, on voit immédiatement que les moyens mouvements

$$\frac{d(w''_1 + w'_1)}{dt}, \quad \frac{d(w''_2 + w'_1)}{dt}$$

sont *tous les deux* finis. C'est là l'une des raisons de la simplicité relative du problème restreint; c'est pour cela que ce problème jouit des propriétés simples démontrées au Chapitre VII.

194. Solutions périodiques. — Supposons que l'on fasse

$$E_1 = E_2 = \ldots = E_{2n} = 0,$$

on aura une solution particulière qui ne dépendra que des arguments w'' et pas des arguments w'.

Dans le cas du problème des trois corps, les distances mutuelles dépendent alors des cosinus de

$$k_1 w''_1 + k_2 w''_2.$$

Comme tous les p sont nuls on aura

$$\sum k = 0, \qquad k_2 = -k_1,$$

de sorte que nos distances mutuelles dépendent de l'argument unique

$$w''_1 - w''_2.$$

Ce sont donc des fonctions périodiques du temps. Nous retombons ainsi sur les *solutions périodiques de la première sorte* étudiées au Chapitre III du Tome I de mon Livre sur les *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste.* Ce sont des solutions rigoureuses.

195. Choix des constantes. — Dans le Chapitre X, nous avons adopté comme constantes fondamentales les valeurs initiales L_i^0, λ_i^0, ξ_i^0, η_i^0; j'ai expliqué au Chapitre VI comment un choix différent est possible et comment on peut par exemple prendre au lieu des valeurs initiales les valeurs moyennes. Il semble qu'ici, le choix le plus convenable serait le suivant.

On prendrait encore les valeurs initiales ξ_i^0 et η_i^0 des ξ_i et des η_i, on prendrait les valeurs initiales λ_i^0 des λ_i et on les choisirait égales à zéro. Mais au lieu des L_i^0 on prendrait les W_i, c'est-à-dire les valeurs moyennes des

$$\sum L \frac{d\lambda}{dw_i} + \sum \xi \frac{d\eta}{dw_i}.$$

Voici comment devrait alors être dirigée l'application de la méthode de Lagrange et les approximations successives du Cha-

pitre V. En première approximation, on prendrait

$$L_i = W_i.$$

Nous poserons

$$L_i = W_i + \delta L_i,$$

$$\lambda_i = w_i + \delta\lambda_i,$$

$$\xi_i = \xi_i^0 + \delta\xi_i,$$

$$\eta_i = \eta_i^0 + \delta\eta_i.$$

En $n^{\text{ième}}$ approximation, on prendrait

$$L_i = -\mu \int \frac{dF_1}{d\lambda_i}\, dt,$$

en remplaçant dans $\frac{dF_1}{d\lambda_i}$ les inconnues par leurs valeurs de $(n-1)^{\text{ième}}$ approximation; L_i n'est pas entièrement déterminé, il ne l'est qu'à une constante près; pour achever de déterminer L_i il faut se donner la valeur moyenne de L_i, nous prendrons

$$\text{(11)} \qquad \text{Val. moy. } L_i = W_i - \text{val. moy.} \left(\sum \delta L \frac{d\,\delta\lambda}{dw_i} + \sum \delta\xi \frac{d\,\delta\eta}{dw_i} \right).$$

Nous avons, en effet,

$$\frac{d\eta}{dw_i} = \frac{d\,\delta\eta}{dw_i}, \qquad \frac{d\lambda_i}{dw_i} = 1 + \frac{d\,\delta\lambda_i}{dw_i}, \qquad \frac{d\lambda_k}{dw_i} = \frac{d\,\delta\lambda_k}{dw_i} \qquad (i \gtrless k),$$

$$\text{Val. moy. } W_i \frac{d\,\delta\lambda}{dw_i} = 0,$$

$$\text{Val. moy. } \xi_k^0 \frac{d\,\delta\eta_k}{dw_i} = 0.$$

Dans le second membre de (11), nous pourrons remplacer les inconnues par leurs valeurs de $(n-1)^{\text{ième}}$ approximation. Si, en effet, l'erreur commise sur δL par exemple est de l'ordre de μ^{n-1}, l'erreur commise sur le produit

$$\delta L \frac{d\,\delta\lambda}{dw_i}$$

sera de l'ordre de μ^n, puisque $\delta\lambda$ et $\frac{d\,\delta\lambda}{dw_i}$ sont de l'ordre de μ.

L'équation (11) permet donc d'achever le calcul de L_i. Je n'ajouterai rien au sujet du choix des constantes E_k; je dirai seulement que, si nous choisissons au lieu des E_k des constantes E'_k

définies par les équations

$$E'_k = E_k \psi_k(E_1^2, E_2^2, \ldots, E_{2n}^2),$$

où ψ_k serait une fonction développable suivant les puissances des E_j^2 et dépendant en outre des W d'une manière quelconque, ces nouvelles constantes E' jouiraient de la propriété la plus importante des constantes E, c'est-à-dire que les inconnues seraient développables suivant les puissances des

$$E'_k \cos w'_k, \qquad E'_k \sin w'_k.$$

196. Calcul direct des séries. — Dans tout ce qui précède, nous nous sommes surtout efforcé d'établir le plus rapidement possible la *forme* des développements; aussi les formules précédentes ne sont-elles pas toujours les plus favorables aux calculs numériques. Notre principal but dans le Volume suivant sera donc de les transformer pour les adapter aux applications numériques.

En attendant je vais indiquer succinctement un moyen d'obtenir directement les séries des Chapitres VII et X. Traitons d'abord le problème restreint et reprenons les équations (10) du n° 126 que nous écrirons ici

$$(12) \qquad \frac{dL_i}{dt} = -\frac{dF}{d\lambda_i}; \qquad \frac{d\lambda_i}{dt} = \frac{dF}{dL_i}; \qquad F = F_0 + \mu F_1.$$

Nous avons vu au Chapitre VII que l'on peut satisfaire à ces équations à l'aide de développements procédant suivant les sinus et les cosinus des multiples de n arguments

$$w_1, \quad w_2, \quad \ldots, \quad w_n,$$

en y faisant

$$w_i = n'_i t + \varpi_i.$$

Les équations (12) peuvent alors être remplacées par les suivantes :

$$(13) \qquad \begin{cases} \sum n'_k \dfrac{dL_i}{dw_k} = -\dfrac{dF}{d\lambda_i}, \\ \sum n'_k \dfrac{d\lambda_i}{dw_k} = \dfrac{dF}{dL_i}. \end{cases}$$

Posons

$$n'_k = n_k + \delta n_k,$$

nos équations pourront s'écrire

$$(14)\qquad \sum n_k \frac{dL_i}{dw_k} = -\sum \delta n_k \frac{dL_i}{dw_k} - \mu \frac{dF_1}{d\lambda_i}$$

et

$$(15)\qquad \sum n_k \frac{d\lambda_i}{dw_k} = -\sum \delta n_k \frac{d\lambda_i}{dw_k} + \frac{dF_0}{dL_i} + \mu \frac{dF_1}{dL_i}.$$

Considérons maintenant la valeur moyenne des différentes quantités considérées. Si U est une fonction périodique quelconque des w, développable en série trigonométrique, sa valeur moyenne que nous désignerons par $[U]$ sera le terme de cette série trigonométrique qui sera indépendant des w.

Les L_i sont des fonctions périodiques des w; on aura donc

$$\left[\frac{dL_i}{dw_k}\right] = 0.$$

Les $\lambda_i - w_i$ sont des fonctions périodiques des w; on aura donc

$$\left[\frac{d\lambda_i}{dw_i}\right] = 1, \qquad \left[\frac{d\lambda_i}{dw_k}\right] = 0 \qquad (i \gtrless k).$$

Si donc nous égalons les valeurs moyennes des deux membres dans (14) et dans (15), il viendra

$$(16)\qquad \mu\left[\frac{dF_1}{d\lambda_i}\right] = 0$$

et

$$(17)\qquad n_i + \delta n_i = \left[\frac{dF_0}{dL_i}\right] + \mu\left[\frac{dF_1}{dL_i}\right].$$

L'équation (16) devra être satisfaite d'elle-même, et elle le sera en effet, puisque nous savons d'avance que le développement est possible. Quant à l'équation (17), elle déterminera δn_i.

Voici alors comment devront être dirigées les approximations successives. Supposons que nous possédions des valeurs de $(n-1)^{\text{ième}}$ approximation

$$\delta n_i, \quad L_i, \quad \lambda_i,$$

dont l'erreur soit de l'ordre de μ^{n-1}; substituons-les dans le second membre de (14); l'erreur commise sur

$$\frac{dF_1}{d\lambda_i}, \quad \frac{dL_i}{dw_k}, \quad \delta n_k$$

sera de l'ordre de μ^{n-1}; d'autre part δn_k et $\frac{dL_i}{d\varpi_k}$ sont de l'ordre de μ, puisque, pour $\mu = 0$, on a

$$n'_k = n_k, \qquad L_i = \text{const.}$$

L'erreur commise sur

$$\mu \frac{dF_1}{d\lambda_i}, \quad \delta n_k \frac{dL_i}{d\varpi_k}$$

sera donc de l'ordre de μ^n.

Donc les équations (14) nous fourniront pour les L_i des valeurs de $n^{\text{ième}}$ approximation dont l'erreur sera de l'ordre de μ^n.

Prenons ensuite l'équation (17) et substituons dans les seconds membres, à la place des λ_i, leurs valeurs de $(n-1)^{\text{ième}}$ approximation et, à la place des L_i, leurs valeurs de $n^{\text{ième}}$ approximation. Comme F_0 ne dépend que des L_i, l'erreur commise sur

$$\left[\frac{dF_0}{dL_i}\right]$$

sera de l'ordre de μ^n; l'erreur commise sur F_1 sera de l'ordre de μ^{n-1} et par conséquent l'erreur commise sur

$$\mu\left[\frac{dF_1}{dL_i}\right]$$

sera de l'ordre de μ^n. L'équation (17) nous fournira donc de nouvelles valeurs de δn_i dont l'erreur sera de l'ordre de μ^n.

Dans le second membre de (15), substituons à la place des δn_i et des L_i leurs valeurs de $n^{\text{ième}}$ approximation et à la place des λ_i leurs valeurs de $(n-1)^{\text{ième}}$ approximation.

L'erreur sur	$\frac{dF_0}{dL_i}$	sera de l'ordre de	μ^n,
»	$\frac{dF_1}{dL_i}$	»	μ^{n-1},
»	δn_k	»	μ^n.
»	$\mu \frac{dF_1}{dL_i}$	»	μ^n,
»	$\frac{d\lambda_i}{d\varpi_k}$	»	μ^{n-1},
»	$\delta n_k \frac{d\lambda_i}{d\varpi_k}$	»	μ^n,

car δn_k est de l'ordre de μ.

L'équation (15) nous donnera donc pour λ_i de nouvelles valeurs dont l'erreur sera de l'ordre de μ^n.

Et ainsi de suite.

197. Passons au cas général du problème des $n+1$ corps. Nous avons vu au Chapitre X que nos inconnues peuvent s'exprimer en fonctions périodiques des $3n$ arguments

$$w''_i = n'_i t + \varpi_i, \qquad w'_i = -\gamma'_i t + \varpi'_i.$$

Soit encore

$$n'_i = n_i + \delta n_i.$$

Je pourrai alors écrire les équations sous la forme suivante :

$$(18) \quad \sum n_k \frac{dL_i}{dw''_k} = -\sum \delta n_k \frac{dL_i}{dw''_k} + \sum \gamma'_k \frac{dL_i}{dw'_k} \qquad - \mu \frac{dF_1}{d\lambda_i},$$

$$(19) \quad \sum n_k \frac{d\xi_i}{dw''_k} = -\sum \delta n_k \frac{d\xi_i}{dw''_k} - \sum \gamma'_k \frac{d\xi_i}{dw'_k} \qquad - \mu \frac{dF_1}{d\eta_i},$$

$$(20) \quad \sum n_k \frac{d\eta_i}{dw''_k} = -\sum \delta n_k \frac{d\eta_i}{dw''_k} + \sum \gamma'_k \frac{d\eta_i}{dw'_k} \qquad - \mu \frac{dF_1}{d\xi_i},$$

$$(21) \quad \sum n_k \frac{d\lambda_i}{dw''_k} = -\sum \delta n_k \frac{d\lambda_i}{dw''_k} - \sum \gamma'_k \frac{d\lambda_i}{dw'_k} + \frac{dF_0}{dL_i} + \mu \frac{dF_1}{dL_i}.$$

Égalons comme plus haut les valeurs moyennes des deux membres de (21), il viendra

$$(22) \qquad n_i + \delta n_i = \left[\frac{dF_0}{dL_i}\right] + \mu \left[\frac{dF_1}{dL_i}\right].$$

D'autre part le double du coefficient de $\sin w'_k$ dans le développement d'une fonction périodique U quelconque sera $[\sin w'_k U]$ et il est clair que, si U est périodique, on aura

$$\left[\sin w'_k \frac{dU}{dw''_i}\right] = 0, \qquad \left[\sin w'_k \frac{dU}{dw'_j}\right] = 0 \qquad (j \gtrless k).$$

Si donc nous égalons les coefficients de $\sin w'_k$ dans les deux membres de (19) il viendra

$$(23) \qquad \gamma'_k \left[\sin w'_k \frac{d\xi_i}{dw'_k}\right] = \mu \left[\frac{dF_1}{d\eta_i} \sin w'_k\right].$$

On substituera dans les seconds membres de (18) et (23) les

valeurs de $(n-1)^{\text{ième}}$ approximation où l'erreur est de l'ordre de μ^{n-1}; l'erreur commise sur L_i sera alors de l'ordre de μ^n, puisque δn_k, γ'_k, $\frac{dL_i}{dw''_k}$, $\frac{dL_i}{dw'_k}$ sont de l'ordre de μ (car $W_i - L_i$ est de l'ordre de μ).

L'équation (23) nous donnera γ'_k et comme le coefficient

$$\left[\sin w'_k \frac{d\xi_i}{dw'_k}\right]$$

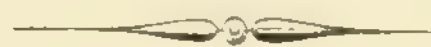
sur lequel l'erreur commise est d'ailleurs de l'ordre de μ^{n-1} ne s'annule pas avec μ, tandis que le second membre contient μ en facteur, l'erreur commise sur γ'_k sera de l'ordre de μ^n.

Dans le second membre de (22) substituons à la place des L_i leurs valeurs de $(n-1)^{\text{ième}}$ approximation, et celles de $n^{\text{ième}}$ approximation, à la place des autres inconnues, l'erreur commise sur δn_i sera de l'ordre de μ^n.

Dans les seconds membres de (19) et (20), substituons à la place des δn et des γ' leurs valeurs de $n^{\text{ième}}$ approximation et à la place des inconnues celles de $(n-1)^{\text{ième}}$, l'erreur commise sur ξ_i et η_i sera de l'ordre de μ^n.

Enfin, dans le second membre de (21), substituons à la place des δn, γ', L leurs valeurs de $n^{\text{ième}}$ approximation et à la place des autres inconnues celles de $(n-1)^{\text{ième}}$, l'erreur commise sur λ_i sera de l'ordre de μ^n.

Telle est la façon de diriger les approximations successives.



CHAPITRE XIII.

PRINCIPE DE LA MÉTHODE DE DELAUNAY.

198. Théorème sur la classe. — Au n° 104, nous avons classé à divers points de vue les différents termes qui s'introduisent dans l'application de la méthode de Lagrange et dont la forme générale est

$$\mu^\alpha A \mathfrak{M}_0 t^m \cos(\nu t + h).$$

Supposons que les moyens mouvements étant presque commensurables, les intégrations puissent introduire ce que nous avons appelé un *petit diviseur*. Soit m' l'exposant de ce petit diviseur au dénominateur.

Nous disons alors que le terme considéré est de *classe*

$$\alpha - \frac{m}{2} - \frac{m'}{2}.$$

Je me propose de démontrer qu'*il n'y a pas de terme de classe négative*, c'est-à-dire que le nombre

$$\alpha - \frac{m}{2} - \frac{m'}{2}$$

est toujours positif ou nul; et que, dans le développement des δL_i, $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$, il est toujours au moins égal à $\frac{1}{2}$.

Pour cela je reprends les équations (9) du n° 106 :

$$(1)\quad \begin{cases} \delta L_i = -\mu \int_0^t \frac{dF_1}{d\lambda_i}\,dt, \quad \delta\xi_i = -\mu \int_0^t \frac{dF_1}{d\eta_i}\,dt, \quad \delta\eta_i = \mu \int_0^t \frac{dF_1}{d\xi_i}\,dt, \\ \delta\lambda_i = \mu \sum C_{ik} \int_0^t dt \int_0^t \frac{dF_1}{d\lambda_k}\,dt + \int_0^t \frac{d\Phi}{dL_i}\,dt + \mu \int_0^t \frac{dF_1}{dL_i}\,dt. \end{cases}$$

Je suppose que le théorème ait été établi pour les valeurs de

$(n-1)^{\text{ième}}$ approximation et je dis qu'il sera encore vrai pour les valeurs de $n^{\text{ième}}$ approximation des δL_i, $\delta\lambda_i$, $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$, valeurs que l'on obtient en substituant aux inconnues dans les seconds membres des équations (1) leurs valeurs de $(n-1)^{\text{ième}}$ approximation.

D'après le n° 100, les dérivées partielles de F_1 qui figurent dans les seconds membres des équations (1) seront de la forme

$$\sum B\mathfrak{M}',$$

où B est, à un facteur numérique près, l'une des dérivées partielles d'ordre supérieur de F_1, dérivée dans laquelle il convient de substituer aux inconnues L_i, λ_i, ξ_i, η_i leurs valeurs de première approximation

$$L_i^0, \quad n_i t + \lambda_i^0, \quad \xi_i^0, \quad \eta_i^0.$$

Quant à $\mathfrak{M}'$, c'est un monome entier par rapport à

$$\delta L_i, \quad \delta\lambda_i, \quad \delta\xi_i, \quad \delta\eta_i,$$

où l'on doit substituer, à la place de ces quantités, leurs valeurs de $(n-1)^{\text{ième}}$ approximation.

Je dis qu'après cette substitution, $\sum B\mathfrak{M}'$ ne contiendra non plus que des termes où

$$\alpha - \frac{m}{2} - \frac{m'}{2} \geq 0.$$

En effet, par hypothèse, tous les termes des valeurs de $(n-1)^{\text{ième}}$ approximation de δL_i, $\delta\lambda_i$, $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$ sont tous de classe positive ou nulle. Il en est de même de B; car pour tous les termes de B, qui sont obtenus sans intégration et ne contiennent pas μ en facteur, on a

$$\alpha = m = m' = 0.$$

Le produit de deux termes de classe positive ou nulle est évidemment aussi de classe positive ou nulle. Donc il en sera de même de tous les termes de

$$\sum B\mathfrak{M}'.$$

Envisageons les trois premières équations (1); elles nous

apprennent que δL_i, $\delta \xi_i$, $\delta \eta_i$ sont de la forme

$$\pm \mu \int_0^t \sum B \mathfrak{M}' \, dt.$$

L'intégration pourra introduire un facteur t, ou un petit diviseur au dénominateur; mais elle ne pourra pas introduire l'un et l'autre; elle n'introduira en effet le facteur t, que s'il s'agit d'un terme séculaire pur; elle n'introduira le petit diviseur ν_0, que s'il s'agit d'un terme contenant en facteur $\cos(\nu_0 t + h)$. Donc, ou bien $m + m'$ ne changera pas, ou bien $m + m'$ augmentera d'une unité.

Après l'intégration, on multiplie par μ, de sorte que α augmente d'une unité. On aura donc après cette double opération

$$\alpha - \frac{m}{2} - \frac{m'}{2} \geqq \frac{1}{2}.$$

Le théorème est donc vrai en ce qui concerne les valeurs de $n^{\text{ième}}$ approximation de δL, $\delta \xi$, $\delta \eta$. *La classe de tous les termes de* δL, $\delta \xi$, $\delta \eta$ *est au moins égale à* $\frac{1}{2}$.

Passons à la dernière équation (1) qui nous donne $\delta \lambda_i$; dans le second membre figurent trois intégrales. La première de ces intégrales est de la forme

$$\mu \int \int \sum B \mathfrak{M}' \, dt.$$

Tous les termes de $\sum B \mathfrak{M}'$ satisfont à la condition

$$\alpha - \frac{m}{2} - \frac{m'}{2} \geqq 0.$$

La *double* intégration peut augmenter $m + m'$ de *deux* unités. On multiplie ensuite par μ, ce qui augmente α d'une unité. On a donc finalement

$$\alpha - \frac{m}{2} - \frac{m'}{2} \geqq 0.$$

Tous les termes de cette intégrale sont donc de classe positive ou nulle. En ce qui concerne la seconde intégrale

$$\int \frac{d\Phi}{dL_i} \, dt,$$

nous remarquons que l'on a encore

$$\frac{d\Phi}{dL_i} = \sum B\mathfrak{M}',$$

où B est, à un facteur numérique près, une dérivée partielle de F_0 où les L_i ont été remplacées par leurs valeurs de première approximation L_i^0, et où $\mathfrak{M}'$ est un monome *du second degré au moins* par rapport aux δL_i, lesquelles doivent être remplacées par leurs valeurs de $(n-1)^{\text{ième}}$ approximation. Or ces valeurs ne contiennent par hypothèse que des termes satisfaisant à la condition

$$\alpha - \frac{m}{2} - \frac{m'}{2} \geqq \frac{1}{2}.$$

Le produit de deux de ces termes sera donc au moins de classe 1, et il en sera de même *a fortiori* du produit de plus de deux termes; il en sera donc ainsi de tous les termes de $\mathfrak{M}'$; quant à B, c'est une simple constante. Donc tous les termes de $\sum B\mathfrak{M}'$ sont au moins de classe 1, c'est-à-dire tels que

$$\alpha - \frac{m}{2} - \frac{m'}{2} \geqq 1.$$

Après l'intégration, $m + m'$ pourra augmenter d'une unité, mais on aura encore

$$\alpha - \frac{m}{2} - \frac{m'}{2} \geqq \frac{1}{2}.$$

Passons à la troisième intégrale; elle est de la forme

$$\mu \int \sum B\mathfrak{M}' \, dt,$$

c'est-à-dire de même forme que les seconds membres des trois premières équations (1); tous ses termes satisfont donc à la condition

$$\alpha - \frac{m}{2} - \frac{m'}{2} \geqq \frac{1}{2}.$$

Donc tous les termes de $\delta\lambda_i$ sont de classe positive ou nulle.

C. Q. F. D.

199. Comment formera-t-on l'équation qui nous donnera tous

les termes de classe nulle du développement des $\delta\lambda_i$ et tous les termes de classe $\frac{1}{2}$ du développement des δL_i, $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$?

Soit ν_0 le petit diviseur envisagé; on aura donc

$$\nu_0 = \sum k_j n_j;$$

les n_j seront les moyens mouvements et les k_j seront des entiers choisis de telle sorte que ν_0 soit très petit.

Je dis d'abord que tous les termes de classe $\frac{1}{2}$ du développement des δL, $\delta\xi$, $\delta\eta$ seront de la forme

$$(2) \qquad A\mu^\alpha t^m \cos(\beta\nu_0 t + h),$$

β étant un entier, et qu'il en est de même de tous les termes de classe 0 du développement des $\delta\lambda$.

En effet, supposons que cela soit vrai en $(n-1)^{\text{ième}}$ approximation, je dis que cela sera encore vrai en $n^{\text{ième}}$ approximation. Pour cela nous nous servirons des trois premières équations (1) qui peuvent s'écrire, ainsi que nous l'avons vu au numéro précédent,

$$(3) \qquad \delta L, \delta\xi, \delta\eta = \mu \int \sum B \mathfrak{M}' \, dt.$$

Il faut dans les seconds membres remplacer les inconnues par leurs valeurs de $(n-1)^{\text{ième}}$ approximation. Considérons un terme quelconque de $\sum B\mathfrak{M}'$; que faut-il pour qu'il nous donne un terme de classe $\frac{1}{2}$ de δL, $\delta\xi$ ou $\delta\eta$? 1° Il faut d'abord qu'il soit de classe zéro; 2° Il faut ensuite que sa classe diminue de $\frac{1}{2}$ par l'intégration pour augmenter ensuite de 1 quand on multiplie par μ.

Comme tous les termes de B sont de classe zéro, il faut que le terme envisagé de $\mathfrak{M}'$ soit de classe zéro; or, comme les termes de classe zéro sont [en $(n-1)^{\text{ième}}$ approximation] tous de la forme (2), il est clair que ce terme envisagé de $\mathfrak{M}'$ devra être de cette forme.

Soit donc B_1 le terme envisagé de B, $\mathfrak{M}'_1$ le terme envisagé de $\mathfrak{M}'$, et

$$\mu \int B_1 \mathfrak{M}'_1 \, dt$$

le terme correspondant de δL, $\delta\xi$ ou $\delta\eta$.

D'après ce que nous venons de voir, $\mathfrak{M}'_1$ est de la forme (2), c'est-à-dire que l'on a

$$\mathfrak{M}'_1 = A\mu^\alpha t^m \cos(\beta\nu_0 t + h) \qquad (\beta \text{ entier}).$$

Soit

$$B_1 \mathfrak{M}'_1 = C\mu^\alpha t^m \cos(\nu t + h'),$$

si ν n'est pas nul, l'intégration introduira le diviseur ν; pour que la classe diminue de $\frac{1}{2}$, il faut que ν soit un multiple de ν_0, c'est-à-dire que l'on ait

$$\nu = \gamma\nu_0 \qquad (\gamma \text{ entier});$$

si ν est nul, l'intégration introduira un nouveau facteur t et la classe diminuera de $\frac{1}{2}$.

Si donc nous voulons que la classe diminue de $\frac{1}{2}$ par l'intégration, il faut que nous ayons

$$\nu = \gamma\nu_0,$$

γ étant un entier positif, négatif ou nul.

Alors B_1 sera de la forme

$$B_1 = K\cos(\delta\nu_0 t + h''), \tag{4}$$

k et h'' sont des constantes et δ est un entier égal à $\beta \pm \gamma$. Nous n'aurons d'ailleurs dans B_1 ni facteur μ, ni facteur t; en effet B est une des dérivées de F_1 où l'on remplace les L, ξ, η par des constantes, les λ_i par $n_i t + \lambda_i^0$. Il ne peut donc ainsi s'introduire ni facteur t, ni facteur μ. Nous pouvons écrire

$$F_1 = \sum H \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \sum p_j\lambda_j,$$

où H dépend des L, des ξ et des η, et où les p_j sont des entiers. Soit DF_1 une dérivée partielle d'ordre quelconque de F_1, multipliée par un facteur numérique. Il est clair que le développement de DF_1 sera de même forme que celui de F_1 et, si un terme de F_1 contient en facteur l'une des lignes trigonométriques de l'angle $\sum p_j\lambda_j$, le terme correspondant de DF_1 contiendra également en facteur l'une des lignes trigonométriques du même angle

$\sum p_j\lambda_j$. On aura donc

$$DF_1 = \sum H' \frac{\cos}{\sin} \sum p_j\lambda_j,$$

où H' est (de même que H) une fonction des L, des ξ et des η.

Pour avoir B, il faut remplacer dans DF_1 les inconnues L_i, ξ_i, η_i, λ_i par L_i^0, ξ_i^0, η_i^0, $n_i t + \lambda_i^0$; on trouve ainsi

$$B = \sum H'_0 \frac{\cos}{\sin} (\nu t + h''),$$

où H'_0 est ce que devient H' pour $L_i = L_i^0$, $\xi_i = \xi_i^0$, $\eta_i = \eta_i^0$ (H'_0 est donc une constante); de plus on a

$$\nu = \sum p_j n_j, \qquad h'' = \sum p_j \lambda_j^0.$$

Les seuls termes de B que nous ayons à considérer (parce qu'ils sont les seuls qui puissent nous donner dans δL, $\delta\xi$, $\delta\eta$ des termes de classe $\frac{1}{2}$) sont ceux qui sont de la forme B_1 dans l'équation (4), c'est-à-dire ceux où $\nu = \delta\nu_0$, δ étant entier.

Nous devrons donc avoir

$$\nu = \sum p_j n_j = \delta\nu_0 = \delta \sum k_j n_j;$$

d'où

$$p_j = \delta . k_j,$$

δ étant un entier.

Ainsi nos entiers p_j doivent être des équimultiples des entiers k_j qui correspondent au petit diviseur ν_0.

Donc on n'a à envisager dans F_1 que les termes où figure un argument $\sum p_j\lambda_j$ qui soit multiple de l'argument $\sum k_j\lambda_j$ qui correspond au petit diviseur.

Je désignerai cet argument par une lettre spéciale en posant

$$\theta = \sum k_j\lambda_j.$$

Si donc nous envisageons la fonction F_1, ceux de ses termes qui contiennent un facteur trigonométrique dont l'argument n'est pas

multiple de θ devront être rejetés, car ils ne peuvent jouer aucun rôle dans le calcul des termes de classe $\frac{1}{2}$ de δL, $\delta\xi$, $\delta\eta$.

On ne devra conserver que les termes indépendants des λ, c'est-à-dire ceux qui ne contiennent aucun facteur trigonométrique (c'est l'ensemble de ces termes que nous avons appelé R aux Chapitres VIII et IX) et en outre ceux qui contiennent un facteur trigonométrique dont l'argument est multiple de θ.

Nous désignerons par Ψ l'ensemble des termes conservés.

D'autre part le terme $B_1 \mathfrak{M}'_1$ nous donnera dans le second membre des équations (3) un terme

$$\mu \int B_1 \mathfrak{M}'_1 \, dt,$$

dont l'argument sera $\delta\nu_0 t + h''$ et dans cet argument le coefficient de t sera $\delta\nu_0$ et par conséquent multiple de ν_0.

Le théorème énoncé est donc vrai en $n^{\text{ième}}$ approximation pour δL, $\delta\xi$, $\delta\eta$.

Passons à $\delta\lambda$, qui nous est donné par la dernière équation (1). Dans le second membre de cette équation, je substitue les valeurs de $(n-1)^{\text{ième}}$ approximation; j'aurai ainsi les valeurs de $n^{\text{ième}}$ approximation de $\delta\lambda$ et je me propose de montrer que les termes de classe *zéro* de cette valeur dépendent encore d'un argument multiple de $\nu_0 t$.

D'après le numéro précédent les deux dernières intégrales du second membre de cette dernière équation (1) ne peuvent nous donner que des termes de classe $\frac{1}{2}$. Il nous suffira donc de considérer la première intégrale et d'écrire

$$\delta\lambda_i = \mu \sum C_{ik} \int_0^t dt \int_0^t \frac{dF_1}{d\lambda_k} dt, \tag{5}$$

qui est encore de la forme

$$\delta\lambda_i = \mu \sum C_{ik} \int \int \sum B \mathfrak{M}' \, dt.$$

Ici encore, pour obtenir un terme de classe *zéro* de $\delta\lambda_i$, il faut partir d'un terme de classe *zéro* de $B\mathfrak{M}'$; il faut ensuite que la

classe soit diminuée de 1 par la double intégration pour augmenter ensuite de 1 par la multiplication par μ.

Or, pour que la classe diminue de 1 par la double intégration, il faut que le terme envisagé ait un argument multiple de $\nu_0 t$.

Donc les termes de classe *zéro* de $\delta\lambda_i$ en $n^{\text{ième}}$ approximation ont encore un argument multiple de $\nu_0 t$. C. Q. F. D.

200. L'équation (5) peut s'écrire

$$\delta\lambda_i = \mu \sum C_{ik} \int_0^t \delta L_k \, dt.$$

D'autre part, nous avons vu que, dans le calcul des termes de classe $\frac{1}{2}$ de $\delta\lambda$, $\delta\xi$, $\delta\eta$, on peut remplacer la fonction F_1 par la fonction Ψ de sorte que les trois premières équations (1) deviennent

$$\delta L_i = -\mu \int_0^t \frac{d\Psi}{d\lambda_i} dt, \qquad \delta\xi_i = -\mu \int_0^t \frac{d\Psi}{d\eta_i} dt, \qquad \delta\eta_i = \mu \int_0^t \frac{d\Psi}{d\xi_i} dt;$$

d'où

$$\frac{dL_i}{dt} = \frac{d\,\delta L_i}{dt} = -\mu \frac{d\Psi}{d\lambda_i},$$

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{d\,\delta\xi_i}{dt} = -\mu \frac{d\Psi}{d\eta_i},$$

$$\frac{d\eta_i}{dt} = \frac{d\,\delta\eta_i}{dt} = \mu \frac{d\Psi}{d\xi_i},$$

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = n_i + \frac{d\,\delta\lambda_i}{dt} = n_i + \sum C_{ik}\, \delta L_k,$$

ou

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = n_i + \sum C_{ik} (L_k - L_k^0).$$

Ce n'est pas tout. Quand on veut obtenir un terme de classe $\frac{1}{2}$ dans δL, $\delta\xi$, $\delta\eta$, il faut, comme nous l'avons vu au numéro précédent, partir d'un terme de classe *zéro* dans $\mathfrak{M}'$.

Or $\mathfrak{M}'$ est un monome entier par rapport aux $\delta\lambda$, δL, $\delta\xi$, $\delta\eta$. Pour obtenir un terme de $\mathfrak{M}'$, on prendra un terme dans chacun des facteurs de ce monome et l'on fera le produit. La classe du produit sera la somme des classes de tous les termes que l'on aura ainsi multipliés l'un par l'autre.

Pour obtenir un terme de classe *zéro* de $\mathfrak{M}'$, il ne faut donc

prendre dans chacun des facteurs que des termes de classe *zéro*. Or δL, $\delta\xi$ et $\delta\eta$ ne contiennent pas de termes de classe *zéro,* mais des termes de classe $\frac{1}{2}$ au moins. Pour obtenir les termes de classe *zéro* de $\mathfrak{M}'$, il suffira donc de faire

$$\delta L = \delta\xi = \delta\eta = 0$$

et de réduire les $\delta\lambda$ à leurs termes de classe *zéro*.

Soit donc

$$\Psi_0, \quad \left(\frac{d\Psi}{d\lambda_i}\right)_0, \quad \left(\frac{d\Psi}{d\xi_i}\right)_0, \quad \left(\frac{d\Psi}{d\eta_i}\right)_0$$

ce que deviennent

$$\Psi, \quad \frac{d\Psi}{d\lambda_i}, \quad \frac{d\Psi}{d\xi_i}, \quad \frac{d\Psi}{d\eta_i},$$

quand on y fait

$$\delta L = \delta\xi = \delta\eta = 0,$$

c'est-à-dire

$$L_i = L_i^0, \qquad \xi_i = \xi_i^0, \qquad \eta_i = \eta_i^0.$$

On aura évidemment

$$\left(\frac{d\Psi}{d\lambda_i}\right)_0 = \frac{d\Psi_0}{d\lambda_i}.$$

Nous venons de voir que, dans le calcul des termes de classe $\frac{1}{2}$ de δL, $\delta\xi$, $\delta\eta$, nous pouvons dans les seconds membres des équations (3) faire $\delta L = \delta\xi = \delta\eta = 0$.

Nos équations deviennent alors

$$(6) \qquad \frac{dL_i}{dt} = -\mu\frac{d\Psi_0}{d\lambda_i}, \qquad \frac{d\xi_i}{dt} = -\mu\left(\frac{d\Psi}{d\eta_i}\right)_0, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = \mu\left(\frac{d\Psi}{d\xi_i}\right)_0.$$

Posons maintenant

$$\Phi_0 = C_0 + \sum n_i(L_i - L_i^0) + \frac{1}{2}\sum C_{ik}(L_i - L_i^0)(L_k - L_k^0),$$

C_0 représente une constante quelconque, le premier signe $\sum$ se rapporte à tous les indices i, le second à tous les indices i et k, en distinguant C_{ik} et C_{ki}. On a alors

$$\frac{d\Phi_0}{dL_i} = n_i + \sum C_{ik}(L_k - L_k^0),$$

et par conséquent

$$(7) \qquad \frac{d\lambda_i}{dt} = \frac{d\Phi_0}{dL_i}.$$

Comme Φ_0 ne dépend que des L, et que Ψ_0 ne dépend que des λ (puisqu'on y a fait $L_i = L_i^0$, $\xi_i = \xi_i^0$, $\eta_i = \eta_i^0$), l'équation (7) et la première équation (6) prennent la forme canonique

$$(8) \qquad \frac{dL_i}{dt} = -\frac{d(\Phi_0 + \mu\Psi_0)}{d\lambda_i}, \qquad \frac{d\lambda_i}{dt} = \frac{d(\Phi_0 + \mu\Psi_0)}{dL_i}.$$

201. Les équations (6) et (7) nous donnent *tous* les termes de classe $\frac{1}{2}$ des L, ξ, η et *tous* les termes de classe *zéro* des $\delta\lambda$, et *elles n'en donnent pas d'autres*. Cela tient à ce que nous avons pris soin de supprimer dans nos équations tout ce qui aurait été susceptible de donner des termes de classe plus élevée.

Si nous n'avions pas pris ce soin nous aurions pu arriver également à d'autres systèmes d'équations analogues, par exemple, au suivant

$$(9) \qquad \begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = -\dfrac{d(F_0 + \mu\Psi)}{d\lambda}, & \dfrac{d\xi}{dt} = -\dfrac{d(F_0 + \mu\Psi)}{d\eta}, \\[2ex] \dfrac{d\lambda}{dt} = \dfrac{d(F_0 + \mu\Psi)}{dL}, & \dfrac{d\eta}{dt} = \dfrac{d(F_0 + \mu\Psi)}{d\xi}. \end{cases}$$

En intégrant les équations (9) nous trouverions encore *tous* les termes de classe $\frac{1}{2}$ de L, ξ, η, *tous* les termes de classe *zéro* de $\delta\lambda$; mais *nous en trouverions encore d'autres*.

Pour passer des équations (9) aux équations (6) et (7) que faut-il faire? Il faut remplacer F_0 par Φ_0; en outre, dans deux des équations (9) il faut remplacer Ψ par Ψ_0 et dans les deux autres $\frac{d\Psi}{d\xi}$, $\frac{d\Psi}{d\eta}$ par $\left(\frac{d\Psi}{d\xi}\right)_0$, $\left(\frac{d\Psi}{d\eta}\right)_0$. On voit que l'on a

$$F_0 = \Phi_0 + \Phi;$$

en remplaçant F_0 par Φ_0, nous supprimons donc les termes qui dépendent de Φ, c'est-à-dire la seconde intégrale du second membre de la dernière équation (1); intégrale qui, nous l'avons vu, ne peut nous donner que des termes de classe supérieure à *zéro*.

De même remplacer Ψ par Ψ_0, ou $\frac{d\Psi}{d\xi}$, $\frac{d\Psi}{d\eta}$ par $\left(\frac{d\Psi}{d\xi}\right)_0$, $\left(\frac{d\Psi}{d\eta}\right)_0$ dans les équations (9), cela revient à faire $\delta L = \delta\xi = \delta\eta = 0$ dans les termes provenant des dérivées de Ψ. Or nous avons vu que les termes provenant de ces dérivées et dépendant de δL, $\delta\xi$, $\delta\eta$, ne peuvent nous conduire qu'à des termes de classe supérieure à $\frac{1}{2}$.

202. Dans le cas du problème des n corps, nous avons

$$F_0 = -\sum \frac{M_i}{2 L_i^2},$$

les M_i étant des constantes qui ne dépendent que des masses. On a alors

$$n_i = \frac{M_i}{(L_i^0)^3}, \qquad C_{ii} = -\frac{3 M_i}{(L_i^0)^4}, \qquad C_{ik} = 0 \qquad (i \gtrless k).$$

Il vient donc

$$\Phi_0 = -\sum \frac{M_i}{2 L_i^{0\,4}} (6 L_i^{0\,2} - 8 L_i L_i^0 + 3 L_i^2).$$

Dans le cas du problème restreint (*cf* n° 123) nous avons trouvé pour F'_0, qui joue le rôle de F_0,

$$F'_0 = -\frac{M'_1}{2 L'^2_1} + n_2(\rho'_1 - L'_1),$$

ou, en supprimant les accents devenus inutiles et remplaçant ρ'_1 par L_2, c'est-à-dire en reprenant les notations du n° 126,

$$F_0 = -\frac{M_1}{2 L_1^2} + n_2(L_2 - L_1);$$

d'où

$$n_1 = \frac{M_1}{(L_1^0)^3} + n_2, \qquad n_2 = n_2,$$

$$C_{11} = -\frac{3 M_1}{(L_1^0)^4}, \qquad C_{12} = C_{21} = C_{22} = 0.$$

Il viendra donc

$$\Phi_0 = -\frac{M_1}{2 L_1^{0\,4}} (6 L_1^{0\,2} - 8 L_1 L_1^0 + 3 L_1^2) + n_2 (L_2 - L_1).$$

Telle est la forme de la fonction Φ_0 dans les deux cas que nous avons à examiner.

203. Principe de la méthode de Delaunay. — Les équations (6) et (7) peuvent s'intégrer facilement. Remarquons en effet que Φ_0 ne dépend que des L_i (c'est d'ailleurs un polynome du second degré par rapport aux L_i); au contraire Ψ_0 ne dépend que de

$$\theta - \sum k_j \lambda_j.$$

En effet, nous avons obtenu Ψ en supprimant dans F_1 tous les termes dont l'argument $\sum p_j \lambda_j$ n'était pas multiple de θ. Donc Ψ est fonction seulement de

$$\theta, \quad L_i, \quad \xi_i, \quad \eta_i$$

et il en est de même des dérivées

$$\frac{d\Psi}{d\xi_i}, \quad \frac{d\Psi}{d\eta_i}.$$

Nous avons obtenu ensuite

$$\Psi_0, \quad \left(\frac{d\Psi}{d\xi_i}\right)_0, \quad \left(\frac{d\Psi}{d\eta_i}\right)_0,$$

en remplaçant dans

$$\Psi, \quad \frac{d\Psi}{d\xi_i}, \quad \frac{d\Psi}{d\eta_i}$$

les inconnues L_i, ξ_i, η_i par les constantes L_i^0, ξ_i^0, η_i^0. Donc

$$\Psi_0, \quad \left(\frac{d\Psi}{d\xi_i}\right)_0, \quad \left(\frac{d\Psi}{d\eta_i}\right)_0$$

ne sont plus fonctions que de θ.

Examinons maintenant les équations canoniques (8). Nous voyons que l'on a

$$\frac{d(\Phi_0 + \mu\Psi_0)}{d\lambda_i} = k_i \frac{d(\Phi_0 + \mu\Psi_0)}{d\theta} = k_i \mu \frac{d\Psi_0}{d\theta},$$

d'où

$$\frac{1}{k_1}\frac{dL_1}{dt} = \frac{1}{k_2}\frac{dL_2}{dt} = \ldots = \frac{1}{k_n}\frac{dL_n}{dt} = -\mu\frac{d\Psi_0}{d\theta}.$$

Cela nous apprend déjà que

$$\frac{L_i}{k_i} - \frac{L_j}{k_j}$$

est une constante; je pourrai mettre le résultat sous une forme plus symétrique en introduisant une variable auxiliaire U et en écrivant

$$L_i - k_i U = L_i^0, \tag{10}$$

L_i^0 étant une constante; je puis, en effet, définir la variable auxiliaire U de telle façon que sa valeur initiale soit nulle.

Nous avons ensuite l'intégrale des forces vives relative aux équations canoniques (8); elle s'écrit

$$\Phi_0 + \mu \Psi_0 = \text{const.} \tag{11}$$

Dans Φ_0 nous devrons remplacer les L_i par leurs valeurs tirées de (10) de sorte que Φ_0 deviendra un polynome du second degré en U; comme Ψ_0 ne dépend que de θ, l'équation (11) nous donnera une relation entre U et θ. Nous avons ensuite

$$\frac{d\theta}{dt} = \sum k_j \frac{d\lambda_j}{dt} = \sum k_j \frac{d\Phi_0}{dL_i} = \frac{d\Phi_0}{dU},$$

qui nous donne une relation entre $\frac{d\theta}{dt}$ et U, et par conséquent une relation entre $\frac{d\theta}{dt}$ et θ.

Quelle est la forme de cette relation? Soit

$$\Phi_0 = A + 2BU + CU^2,$$

A, B et C sont des constantes. Soit A + H la constante du second membre de (11), il vient

$$CU^2 + 2BU = H - \mu \Psi_0;$$

d'où

$$CU + B = \sqrt{B^2 + HC - \mu C \Psi_0}.$$

D'autre part

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\Phi_0}{dU} = 2CU + 2B;$$

d'où

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\sqrt{B^2 + HC - \mu C \Psi_0}$$

et enfin

$$t = \int \frac{d\theta}{2\sqrt{B^2 + HC - \mu C \Psi_0}}.$$

Comme le radical ne dépend que de θ, nous avons la relation entre

θ et t par une simple quadrature. Nous aurons donc θ, U et L_i en fonction de t. Nous avons d'autre part

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = \mu \frac{d\Phi_0}{dL_i},$$

le second membre est une fonction des L_i et par conséquent de U, c'est donc une fonction connue de t, de sorte que nous aurons λ par une simple quadrature. On peut même remarquer que le second membre est un polynome du premier degré en U, de sorte que nous aurons entre les λ_i des relations linéaires.

Nous aurons enfin

$$\frac{d\xi_i}{dt} = -\mu\left(\frac{d\Psi}{d\eta_i}\right)_0, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = \mu\left(\frac{d\Psi}{d\xi_i}\right)_0.$$

Comme les seconds membres sont des fonctions de θ seulement, ce seront des fonctions connues du temps t, de sorte que nous aurons les ξ_i et les η_i par de simples quadratures.

204. Tel est le principe de la méthode de Delaunay; on voit qu'elle nous permet de calculer très simplement la somme des termes de classe minimum, c'est-à-dire des termes de classe $\frac{1}{2}$ pour L, ξ, η, de classe *zéro* pour λ. On voit en outre que cette méthode consiste essentiellement à supprimer dans F_1 les termes de courte période, c'est-à-dire ceux qui dépendent d'un argument $\sum p_i\lambda_i$, où les entiers p_i ne sont pas des équimultiples des k_i, et à n'y conserver que les termes de longue période, ou les plus importants de ces termes.

Il est aisé de comprendre l'importance de ces termes de classe minimum. Il arrive quelquefois que le rapport des moyens mouvements est presque commensurable; c'est ce qui arrive par exemple pour Jupiter et Saturne, planètes pour lesquelles ce rapport est voisin de $\frac{2}{5}$; c'est ce qui arrive pour certaines petites planètes dont le moyen mouvement est presque le double, ou à peu près une fois et demie celui de Jupiter; la plus importante de ces planètes est Hécube.

Les termes de classe minimum ont alors de grands coefficients à cause des petits diviseurs introduits par l'intégration. La période

de ces termes est longue, et souvent de plusieurs siècles. La période des termes, dépendant des arguments ϖ', par exemple celle des termes calculés au Chapitre VIII, est beaucoup plus longue encore et se compte par centaines de siècles.

Que devons-nous conclure? Si l'on veut prévoir à courte échéance, c'est surtout au terme d'*ordre* inférieur qu'il faut attacher de l'importance; si l'on veut prévoir à échéance assez longue, il faut calculer tous les termes de *classe* inférieure : c'est ce que nous venons d'apprendre à faire dans le numéro précédent. Si enfin on veut prévoir à très longue échéance, il faut calculer les termes de *rang* inférieur, ainsi que nous l'avons fait aux Chapitres VIII et IX.

205. La méthode de Delaunay peut d'ailleurs s'appliquer dans des cas beaucoup plus généraux. Soient des équations canoniques

$$\frac{dL_i}{dt} = -\frac{dF}{d\lambda_i}, \qquad \frac{d\lambda_i}{dt} = \frac{dF}{dL_i},$$

où F est une fonction des L et des λ, qui ne dépend des λ que par la combinaison

$$\theta = \sum k_j \lambda_j.$$

Je la suppose d'ailleurs périodique par rapport aux λ. En d'autres termes, la fonction F est développable suivant les cosinus et les sinus des multiples de θ, et les coefficients de ce développement ne dépendent que des L. On trouve encore

$$L_i = k_i U + L_i^0,$$

U étant une variable auxiliaire et L_i^0 une constante. On a l'intégrale des forces vives

$$F = \text{const.}$$

qui nous donne une relation entre U et θ. On trouve ensuite

$$\frac{d\theta}{dt} = \sum k_j \frac{dF}{dL_j};$$

d'où

$$t = \int \frac{d\theta}{\sum k_j \frac{dF}{dL_j}}.$$

Comme la quantité sous le signe $\int$ ne dépend que de θ et de U, et que U est lié à θ par l'équation des forces vives, cette quantité sous le signe $\int$ est une fonction connue de θ, de sorte que l'on obtient t par une simple quadrature.

Donc θ, U et par conséquent les L_i peuvent être regardés comme des fonctions connues de t. Dans les équations

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = \frac{dF}{dL_i}$$

le second membre qui ne dépend que des L et de θ sera aussi une fonction connue de t, de sorte que nous aurons λ_i par une simple quadrature ; et l'intégration est achevée.

206. **Application à Hécube**. — Le meilleur exemple d'application de la méthode de Delaunay que nous puissions choisir est celui de la planète Hécube. Cette petite planète, dont le moyen mouvement est sensiblement le double de celui de Jupiter, a été l'objet de travaux nombreux parmi lesquels nous citerons la thèse de M. Simonin.

Je choisirai les unités de telle façon que la longitude moyenne de Jupiter soit égale à t ; et j'appellerai R une fonction égale à la masse du Soleil divisée par la distance du Soleil à Hécube, plus la masse de Jupiter divisée par la distance de Jupiter à Hécube, moins le demi-carré de la vitesse d'Hécube.

Je désigne par L la racine carrée du grand axe de l'orbite d'Hécube, et je pose

$$G = L\sqrt{1-e^2}, \qquad \Theta = G\cos i,$$

e et i étant l'excentricité et l'inclinaison de cette orbite.

Je désigne par l, g et θ l'anomalie moyenne, la distance du périhélie au nœud et la longitude du nœud. Dans ces conditions, les équations sont canoniques et s'écrivent.

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = \dfrac{dR}{dl}, & \dfrac{dG}{dt} = \dfrac{dR}{dg}, & \dfrac{d\Theta}{dt} = \dfrac{dR}{d\theta}, \\[2ex] \dfrac{dl}{dt} = -\dfrac{dR}{dL}, & \dfrac{dg}{dt} = -\dfrac{dR}{dG}, & \dfrac{d\theta}{dt} = -\dfrac{dR}{d\Theta}. \end{cases}$$

La fonction R dépend des six variables L, G, Θ, l, g, θ et de t. Ces équations prennent une autre forme si, par une analyse toute pareille à celle du n° 123, on pose

$$F = R + \Theta$$

et, si l'on prend pour variable $\theta - t$ au lieu de θ, elles deviennent alors

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = \dfrac{dF}{dl}, & \dfrac{dG}{dt} = \dfrac{dF}{dg}, & \dfrac{d\Theta}{dt} = \dfrac{dF}{d(\theta - t)}, \\[2ex] \dfrac{dl}{dt} = -\dfrac{dF}{dL}, & \dfrac{dg}{dt} = -\dfrac{dF}{dG}, & \dfrac{d(\theta - t)}{dt} = -\dfrac{dF}{d\Theta}. \end{cases}$$

Dans ces conditions, F est regardé comme fonction des six variables L, G, Θ, l, g, $\theta - t$, et de t. Mais nous devons observer que, si l'excentricité de Jupiter était nulle, F ne dépendrait plus de t, mais seulement des six premières variables.

Nous allons maintenant changer de variables. Supposons que le rapport des moyens mouvements soit très voisin de $\dfrac{n+1}{n}$, n étant un entier qui pour Hécube sera égal à 1. Nous poserons

$$\lambda = l + g + \theta - t, \qquad s = -nl - (n+1)g - (n+1)(\theta - t),$$
$$\tau = -nl - ng - (n+1)(\theta - t),$$
$$U = L + nS + nT, \qquad S = L - G, \qquad T = G - \Theta.$$

On constate aisément que l'on a identiquement

$$Ll + Gg + \Theta(\theta - t) = U\lambda + Ss + T\tau$$

et par conséquent

$$L\,dl + G\,dg + \Theta\,d(\theta - t) = U\,d\lambda + S\,ds + T\,d\tau,$$

ce qui prouve qu'avec les nouvelles variables les équations resteront canoniques et s'écriront

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = \dfrac{dF}{d\lambda}, & \dfrac{dS}{dt} = \dfrac{dF}{ds}, & \dfrac{dT}{dt} = \dfrac{dF}{d\tau}, \\[2ex] \dfrac{d\lambda}{dt} = -\dfrac{dF}{dU}, & \dfrac{ds}{dt} = -\dfrac{dF}{dS}, & \dfrac{d\tau}{dt} = -\dfrac{dF}{dT}. \end{cases}$$

Voyons quelle est la signification de ces nouvelles variables. D'abord λ représente la différence des longitudes moyennes.

D'autre part,

$$\frac{ds}{dt} = -n\frac{dl}{dt} + (n+1)\left(\frac{dg}{dt} - \frac{d\theta}{dt} - 1\right), \qquad \frac{d\tau}{dt} = \frac{ds}{dt} - \frac{dg}{dt}.$$

Comme $\frac{dg}{dt}$ et $\frac{d\theta}{dt}$ sont très petits et $\frac{dl}{dt}$ très voisin de $\frac{n+1}{n}$, on voit que $\frac{ds}{dt}$ et $\frac{d\tau}{dt}$ sont très petits.

S est de l'ordre du carré de l'excentricité et T de l'ordre du carré de l'inclinaison.

Comme S et T sont petits, U différera peu de la racine carrée du grand axe.

Je désignerai par l' et ϖ' l'excentricité et le périhélie de Jupiter, et je poserai

$$v = n\lambda - t + \varpi'.$$

Comme $\frac{d\varpi'}{dt}$ est nul, ou du moins très petit, on aura

$$\frac{dv}{dt} = n\frac{d\lambda}{dt} - 1 = n\frac{dl}{dt} - n + 1,$$

ce qui montre que $\frac{dv}{dt}$ est aussi très petit.

Posons maintenant

$$x = \sqrt{2\mathrm{S}}\cos s, \qquad y = \sqrt{2\mathrm{S}}\sin s; \qquad \xi = \sqrt{2\mathrm{T}}\cos\tau, \qquad \eta = \sqrt{2\mathrm{T}}\sin\tau.$$

Comme

$$x\,dy - \mathrm{S}\,ds, \qquad \xi\,d\eta - \mathrm{T}\,d\tau$$

sont des différentielles exactes, les équations resteront canoniques et s'écriront

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{U}}{dt} = \dfrac{d\mathrm{F}}{d\lambda}, & \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d\mathrm{F}}{dy}, & \dfrac{d\xi}{dt} = \dfrac{d\mathrm{F}}{d\eta}, \\[2ex] \dfrac{d\lambda}{dt} = -\dfrac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{U}}, & \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{d\mathrm{F}}{dx}, & \dfrac{d\eta}{dt} = -\dfrac{d\mathrm{F}}{d\xi}. \end{cases}$$

207. **Forme de la fonction perturbatrice.** — La fonction F est, comme on sait, développable, suivant les puissances de $e\cos l$, $e\sin l$, $i\cos(l+g)$, $i\sin(l+g)$, $e'\cos(t-\varpi')$, $e'\sin(t-\varpi')$ et suivant les cosinus et les sinus des multiples de la différence des longitudes moyennes λ, les coefficients du développement dépendant encore des grands axes, c'est-à-dire de L. Mais on voit

aisément (*cf.* nos 65 et suiv.) que $e\cos l = e\cos[s+(n+1)\lambda]$, $e\sin l$, $i\cos(l+g) = i\cos[l+(n+1)\lambda]$, $i\sin(l+g)$ sont développables suivant les puissances de x, y, ξ, η et les cosinus et sinus des multiples de λ; que d'autre part

$$e'\cos(l-\varpi') = (e'\cos v)\cos n\lambda - (e'\sin v)\sin n\lambda,$$
$$e'\sin(l-\omega') = (e'\cos v)\sin n\lambda - (e'\sin v)\cos n\lambda.$$

On conclura que F est développable suivant les puissances de x, y, ξ, η, $e'\cos v$, $e'\sin v$ et suivant les cosinus et les sinus des multiples de λ. Les coefficients du développement dépendent encore de $L = U - nS - nT$; ces fonctions de L peuvent être développées par la formule de Taylor suivant les puissances croissantes de $n(S+T)$, c'est-à-dire de

$$\frac{n}{2}(x^2+y^2+\xi^2+\eta^2);$$

de sorte que finalement F procédera suivant les puissances de x, y, ξ, η, $e'\cos v$, $e'\sin v$, $\cos p\lambda$, $\sin p\lambda$, les coefficients du développement ne dépendant plus que de U.

J'observe maintenant que, par raison de symétrie, F ne doit pas changer :

1° Quand on change ξ et η en $-\xi$ et $-\eta$.

2° Quand on change y, η et v en $-y$, $-\eta$ et $-v$.

Cela montre qu'un grand nombre de termes ne doivent pas figurer dans le développement.

Voyons maintenant quels sont, parmi ces termes, ceux qui sont à courte période. Ce sont les termes qui contiennent λ en dehors des combinaisons s, τ ou v. Car nous avons vu que $\frac{ds}{dt}$, $\frac{d\tau}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$ sont très petits, tandis que $\frac{d\lambda}{dt}$ est fini.

Si, conformément à l'esprit de la méthode de Delaunay, nous supprimons ces termes à courte période, nous pourrons dire que F est développable suivant les puissances de x, y, ξ, η, $e'\cos v$, $e'\sin v$, les coefficients dépendant seulement de U.

Si nous négligeons, comme M. Simonin, les termes qui contiennent en facteur :

$$e^3,\quad i^4,\quad i^2 e,\quad e^2 e',\quad e'^2,$$

et si nous supprimons les termes qui doivent être nuls en vertu de la symétrie, nous trouverons

$$(5)\quad \begin{cases} F = A + Bx + Cx^2 + Dy^2 + E\xi^2 + H\eta^2 \\ \qquad + Ke'\cos v + Lxe'\cos v + Mye'\sin v. \end{cases}$$

A, B, C, D, E, H, K, L, M sont des fonctions de U.

Je remarque d'abord que F dépend encore de λ *indirectement*. Car F est supposé exprimé en fonction de U, λ, x, y, ξ, η et de t; ici F dépend de U, x, y, ξ, η et $v = n\lambda - t + \varpi'$. C'est par l'intermédiaire de v qu'il dépend encore de λ et de t.

Si l'on suppose que l'on néglige la masse de Jupiter, on aura simplement

$$F = \frac{1}{2L^2} + \Theta = \frac{1}{2(U - nS - nT)^2} + U - (n + 1)(S + T)$$

ou, en négligeant les carrés de S et de T,

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2U^2} + U + \left(\frac{n}{U^3} - n - 1\right)(S + T) \\ &= \frac{1}{2U^2} + U + \left(\frac{n}{U^3} - n - 1\right)\frac{x^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2}{2}; \end{aligned}$$

de sorte que si l'on pose

$$A = A_0 + mA_1, \qquad B = B_0 + mB_1, \qquad \dots,$$

m étant la masse de Jupiter et A_0, A_1, ... étant des fonctions de U indépendantes de cette masse, on aura

$$(6)\quad \begin{cases} A_0 = \dfrac{1}{2U^2} + U; \qquad C_0 = D_0 = E_0 = H_0 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n}{U^3} - n - 1\right), \\ \qquad\qquad B_0 = K_0 = L_0 = M_0 = 0. \end{cases}$$

208. Méthode de Delaunay. — Comme première approximation, nous allons supposer

$$e' = \xi = \eta = 0.$$

Dans ces conditions, F ne dépend plus que de x, de y, et de U. On peut alors pousser l'intégration jusqu'au bout par la méthode de Delaunay. Nous n'avons d'ailleurs aucune raison de négliger les termes de degré supérieur en x et en y.

On trouve immédiatement deux intégrales

$$U = \text{const.}, \qquad F = \text{const.},$$

car F ne dépend ni de λ, ni de t.

Considérons donc x et y comme les coordonnées d'un point dans un plan, U comme une constante donnée et construisons les courbes

$$F = C,$$

en faisant varier la constante C.

Si l'on supposait $m = 0$, il viendrait

$$F = \frac{1}{2\left[U - \frac{n}{2}(x^2+y^2)\right]^2} + U \quad \frac{n+1}{2}(x^2+y^2)$$

et nos courbes se réduiraient à des cercles concentriques ayant pour centre l'origine.

On doit faire une attention toute spéciale aux points pour lesquels on a

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dy} = 0,$$

et, par conséquent,

$$x = \text{const.}, \qquad y = \text{const.}$$

Ces points correspondent aux solutions périodiques.

Dans le cas de $m = 0$, ces points sont les suivants : l'origine $x = y = 0$ qui correspond à une orbite circulaire, et tous les points du cercle

$$\frac{dF}{dS} = \frac{n}{(u - nS)^3} - n + 1 = 0$$

qui correspondent au cas où le rapport des moyens mouvements est rigoureusement égal à $\frac{n+1}{n}$.

L'équation $\frac{dF}{dS} = 0$ peut, suivant la valeur de U, ne pas avoir de racine positive, ou en avoir une ; nous nous supposerons placés dans ce dernier cas.

Nous remarquerons alors trois points, à savoir l'origine O et les deux points d'intersection A et B de l'axe des x avec le cercle

$$\frac{dF}{dS} = 0.$$

Passons au cas où m n'est pas nul, mais très petit. Les deux équations

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dy} = 0$$

peuvent être remplacées par les suivantes :

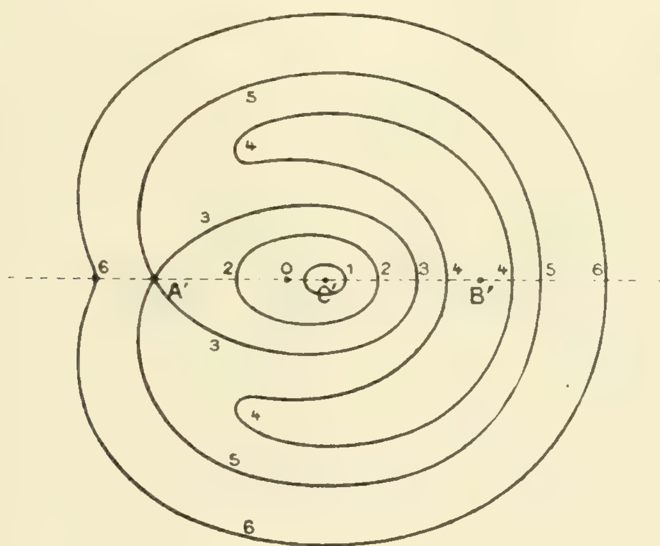
$$y = 0, \qquad \frac{dF}{dx} = 0,$$

auxquelles correspondront divers points sur l'axe des x. Comme m est très petit, ces points seront très voisins des positions O, A, B qu'ils occupaient pour $m = 0$.

Nous aurons donc trois points, C voisin de O, A′ voisin de A, B′ voisin de B, qui correspondront à trois solutions périodiques, la première de la première sorte, les deux autres de la seconde sorte.

Les courbes F = C présenteront alors la forme représentée sur la figure 3. Les courbes sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6. On

Fig. 3.



remarquera que 1 et 2 sont des courbes fermées entourant le point C; que 3 et 5 forment par leur réunion une sorte de limaçon de Pascal ayant le point A′ pour point double ; que 4 est une courbe fermée entourant le point B′; enfin que 6 est une courbe fermée entourant les trois points A′, B′, C′.

Le point représentatif x, y décrit une de ces courbes et sa vitesse a pour composantes $\frac{dF}{dy}$, $-\frac{dF}{dx}$; elle est donc inversement

proportionnelle à la distance normale de deux courbes infiniment voisines. Le sens de cette vitesse dépend du sens de la normale suivant lequel les F vont en croissant.

Les courbes 1, 2 et 3 seront donc décrites dans le sens des aiguilles d'une montre, par exemple; les courbes 4, 5 et 6 dans le sens inverse. D'ailleurs, tandis que le point x, y fera une infinité de fois le tour des courbes 1, 2, 4 et 6, il ne parcourra qu'une seule fois les courbes 3 et 5 en allant du point A′ au point A′ dont il sera infiniment voisin tant pour $t = -\infty$ que pour $t = +\infty$. La courbe 4 correspond au cas de la *libration*.

Nos courbes fermées différeront peu de circonférences.

Rappelons que les coordonnées polaires du point x, y sont $\sqrt{2S}$ et s. Or on voit aisément que, quand on parcourt une de nos courbes, S atteint son maximum et son minimum sur l'axe des x et que la différence entre ce maximum et ce minimum est en général de l'ordre de m, sauf pour les courbes 3, 4, 5 ou pour les courbes peu différentes de 3 ou de 5, pour lesquelles cette différence est de l'ordre de $\sqrt{m}$.

Parlons maintenant des variations de l'angle polaire s. Nous voyons qu'en général, quand le point x, y décrit une de nos courbes, s varie de 0 à 2π ou de 2π à 0. Il y a exception pour la courbe 1 et pour la courbe 4 qui laissent l'origine O en dehors.

Pour ces courbes, l'angle s oscille autour de 0.

Mais les deux cas sont bien différents; dans les deux cas, on a *rigoureusement* la relation suivante : le moyen mouvement d'Hécube est égal à deux fois le moyen mouvement de Jupiter moins deux fois le moyen mouvement du périhélie d'Hécube (je suppose que $n = 1$, comme cela a lieu dans le cas d'Hécube). Cette relation signifie en effet que la valeur moyenne de $\frac{ds}{dt}$ est nulle.

Mais on sait que le mouvement du périhélie est de l'ordre des masses à moins que l'excentricité ne soit elle-même de l'ordre des masses; car, si l'excentricité est très petite, il suffit d'une très faible perturbation pour déplacer beaucoup le périhélie. Or, dans le cas de 4, l'excentricité est finie, le mouvement du périhélie est de l'ordre des masses, de sorte que le rapport des moyens mouvements est égal à $2 = \frac{n+1}{n}$ à des quantités près de l'ordre

des masses. On a une véritable libration. Dans le cas de I, au contraire, l'excentricité étant petite, le mouvement du périhélie est fini, de sorte que le rapport des moyens mouvements n'est pas voisin de $2 = \frac{n-1}{n}$; il n'y a pas de libration.

209. Influence de l'inclinaison. — Les équations qui donnent les variations de l'inclinaison prennent la forme très simple

$$\frac{d\xi}{dt} = -H\eta, \qquad \frac{d\eta}{dt} = -E\xi; \tag{7}$$

E et H doivent être regardés comme des constantes, puisque $U = \text{const.}$ L'intégration est donc immédiate.

J'ai dit que l'on avait $U = \text{const.}$; et, en effet, si je tiens compte de l'inclinaison, mais que je continue à négliger l'excentricité de Jupiter et les termes à courte période, F dépend seulement de U, x, y, ξ, η, mais ne dépend ni de λ, ni de t; on a donc

$$\frac{dF}{d\lambda} = 0, \qquad U = \text{const.}, \qquad F = \text{const.}$$

210. Calcul de λ. — La différence des longitudes moyennes de λ se calculera par une simple quadrature.

On trouve en effet

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{dF}{dU} = -A' - B'x - C'x^2 + D'y^2 - E'\xi^2 - H'\eta^2, \tag{8}$$

A′, B′, ... désignant les dérivées de A, B, ... par rapport à U. Comme U est une constante, les coefficients A′, B′, ... sont aussi des constantes; quant à x, y, ξ, η, ce sont des fonctions connues et périodiques du temps. Cela résulte, pour x et y, de ce fait que les courbes $F = C$ sont fermées, et pour ξ et η de la forme des équations (7).

Le dernier membre de (8) est donc une série trigonométrique dont la quadrature est immédiate. Le terme tout connu de cette série représentera alors le moyen mouvement de λ.

M. Andoyer a poussé l'approximation plus loin en tenant compte des puissances supérieures de x et de y. Je ne puis que renvoyer à son Mémoire dans le Tome XX du *Bulletin astronomique*.

FIN DU TOME I.

TABLE DES MATIÈRES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME PREMIER.

34911 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins, 55.